Filosofia Unisinos
16(1):22-43, jan/apr 2015
© 2015 by Unisinos – doi: 10.4013/fsu.2015.161.02

O comprometimento da identidade com a individuação nas teorias formais clássicas

The commitment between identity and individuation in classical formal theories

Jaison Schinaider[1]
Centro Universitário Municipal de São José

Resumo
Neste artigo, defendemos a ideia de que as teorias formais clássicas (aqui entendidas como sendo a lógica clássica, a teoria de conjuntos usual e, desta forma, também a matemática nelas assentadas) parecem se comprometer com a individualidade de seus 'objetos' a partir do modo como (tentam) formalizar a noção de identidade em seus sistemas. Iniciamos mostrando como a identidade é formalizada nestas disciplinas e os problemas que existem em tais formalizações (algo que em geral os filósofos desconhecem). Entremeados à discussão, mostramos vários argumentos que podem nos fazer crer que tais teorias formais realmente assumem que seus objetos, ao possuir uma identidade, são assim também indivíduos na acepção plena do termo.

Palavras-chave: identidade, individualidade, lógica clássica, matemática clássica, teoria de conjuntos clássica.

Abstract
In this article, we advocate the view that classical formal theories (here understood as classical logic, usual set theory and mathematics) seem to be committed to the individuality of their 'objects' by assuming the identity of these objects. We begin by showing how identity is assumed in these disciplines and the problems that exist in such frameworks, which philosophers are typically unaware of. Throughout the text, we show several arguments that can make us believe that the classical formal theories really understand their objects as having an identity and are, therefore, individuals.

Keywords: classical logic, classical mathematics, classical set theory, identity, individuality.

[1] Doutor em Filosofia. Professor do Centro Universitário Municipal de São José. Rua Afonso Pena, 494, sl. 204, Bairro Estreito, 88070-650, Florianópolis, SC, Brasil. E-mail: jaisonsc@gmail.com

Introdução

"[…] formal logic must be developed twice" (Kunen, 2009, p. 191).

A noção de identidade, de um ponto de vista filosófico, por si só já dá origem a diversos problemas bastante intrincados e complexos. Não obstante, esta noção também está presente na lógica, matemática e teoria de conjuntos clássicas e, nestas últimas disciplinas – mesmo estando tal conceito revestido com roupagens mais formais –, ele também reserva grandes dificuldades e se compromete com certas visões e intuições que temos da realidade que nos cerca (e assim, poderíamos dizer, com uma metafísica). Neste artigo, faremos uma discussão um pouco detalhada sobre como o conceito de identidade é concebido nestas disciplinas, tentando entender quais são enfim estes comprometimentos. Em particular, defenderemos que a noção de identidade presente na lógica e teoria de conjuntos clássicas parece assumir uma visão *individualizadora* de/para seus 'objetos' (num sentido que ficará claro durante o texto): como a matemática pode ser fundamentada em tais teorias, argumentaremos que a matemática também está comprometida com a individualidade de seus elementos. Todavia, para que isso tome forma, primeiramente iremos detalhar o que significa o conceito de identidade como *tese formal*, expondo o modo como a identidade é erigida tanto na lógica de primeira como de segunda ordem – bem como problemas advindos de tais construções (algo que muitos filósofos desconhecem) – para se obter assim um 'pano de fundo' onde poderemos defender de um modo mais efetivo tal posição.

Identidade em lógica clássica

Na lógica clássica, como é sabido, pode-se encontrar o que é denominado por muitos (e a denominaremos aqui) como *Teoria Clássica da Identidade* (TCI).[2] A formalização da noção da identidade na lógica[3] é de suma importância e, pode ser dito, tenta capturar a visão 'informal' de identidade que as pessoas em geral possuem. Sem muito rigor, podemos afirmar que o homem comum usualmente toma a identidade como sendo, por exemplo, uma relação que um objeto tem consigo mesmo e com nada mais, de modo que as coisas têm algumas propriedades que são somente delas e que as fazem ser identificadas de um modo determinado. Obviamente, esta é uma tese um tanto forte, mas, como dissemos, parece ser este modo que as pessoas em geral entendem a identidade: um 'algo' (propriedade, característica, qualidade) que faz cada coisa ser idêntica apenas a si mesmo. Todavia, o grande problema é que nesta 'definição' já estamos pressupondo termos como "mesmo" e "outro", os quais de antemão já avocam algum critério de identidade e que parecem assim cair em uma petição de princípio.

A questão que se põe agora é como podemos, então, tratar tal conceito intuitivo de identidade de um ponto de vista formal, modo lógica clássica. Será que é possível captar de uma forma adequada, via tal arcabouço, tal noção informal que todos temos? Será que a redundância dos termos acima ainda permanece em tal formalização? Se não, de que forma é evitado? Qual a diferença entre o trato da

[2] O uso da palavra "pode" nessa frase se deve ao fato de que não necessariamente precisamos ter uma "lógica com identidade". A TCI surge exatamente se quisermos formalizar (i.e., assumir) a noção de identidade dentro da lógica clássica. Com efeito, podemos também usar uma lógica sem identidade e obter vários resultados e teoremas relativos a tal lógica sem essa noção: os teoremas de completude e correção do Cálculo Quantificacional Clássico, por exemplo, não fazem uso do conceito de identidade.

[3] A partir de agora, usaremos apenas o termo "lógica" para se referir à lógica clássica.

identidade nas diferentes 'divisões' da lógica (primeira ordem e ordem superior)? Elas são equivalentes? E, em especial para este trabalho: com quais coisas a identidade como tratada em tais disciplinas se compromete? São estas questões que tentaremos responder a partir de agora. Não obstante, já alertamos que a formulação do conceito de identidade na lógica dependerá sempre do sistema particular considerado, e há diferenças substanciais entre os resultados alcançados em uma ou outra formulação (apesar de cada uma dessas formulações tentar captar, como já afirmado, o – ou um possível – conceito intuitivo de identidade que todos temos).

Identidade em linguagens de 1ª ordem

Nesta primeira seção, trataremos do modo como a identidade é formalmente desenvolvida nas linguagens de primeira ordem.[4] Desta forma, assuma a partir de agora *L* como sendo a linguagem da lógica clássica de primeira ordem. Como é bem sabido, tal linguagem contém um conjunto adequado de conectivos proposicionais, quantificadores, variáveis individuais, símbolos auxiliares (como os de pontuação), símbolos para predicados e para operações. Esta linguagem pode ser ampliada de forma a se aceitar mais símbolos em seu escopo e assim conseguirmos 'manipular' mais coisas (por exemplo, podemos inserir o símbolo de pertinência $\in$ nesta linguagem quando ela é empregada no trato conjuntista). O que importa dizer é que há dois modos de se definir a identidade ainda em lógica de primeira ordem: a primeira é tomá-la como conceito primitivo; a segunda é tomá-la como conceito definido.

A identidade como conceito primitivo

Nos textos usuais de lógica, normalmente se costuma tomar a identidade como sendo um conceito primitivo. Neste caso, assume-se que *L* contém um símbolo de predicado binário, *A* por exemplo, e define-se que a fórmula $t=s$ seja uma abreviação para $A(t,s)$, bem como que $t\neq s$ seja uma abreviação para $\neq A(t,s)$.[5] Assim, o símbolo (ou o predicado) '=' é chamado de símbolo de igualdade ou de identidade, e *afirmamos a=b quando a e b forem o 'mesmo objeto'* (isso relaciona a identidade com a igualdade) (cf. Hodges, 1983, p. 68). Enfatizamos este ponto: em lógica clássica, uma fórmula "$a = b$" (se verdadeira) diz que *a* e *b são um* e *a mesma coisa*, apenas sendo mencionado por dois nomes. Isso claramente já mostra o caráter fregeano de tal abordagem e reflete um forte comprometimento com individualidade de tal conceito nesta disciplina, já que a ideia subjacente aqui é de que os *objetos sejam iguais apenas a si mesmos* e *com mais nenhum outro*, isto é, que tenham assim um 'tipo de individualidade' que os fazem únicos (seja esta individualidade dada pelo que for), espelhando assim o modo intuitivo de que falamos acima. Neste sentido, podemos assumir – sem perda de generalidade – que um *indivíduo* (neste sentido específico) é um objeto que respeita os ditames da teoria clássica da identidade. É claro que a definição de indivíduo do ponto de vista filosófico é complicada, mas veja que aqui estamos apenas tomando a noção de indivíduo de um modo bem específico, a saber, *do ponto de vista lógico*. Desta forma, *do ponto de vista lógico*, coisas iguais são a mesma coisa, são uma só: são o mesmo indivíduo.

Como se sabe, semanticamente, ao símbolo ou predicado binário acima de identidade deveríamos associar a diagonal do domínio D da interpretação consi-

[4] Na lógica de primeira ordem, quantificamos apenas sobre variáveis individuais e constantes individuais, e não sobre símbolos de predicado (isto é feito nas lógicas de ordem superior, como veremos).
[5] Percebe-se de pronto que o símbolo "=" não pertence à linguagem *L*, mas à sua metalinguagem.

derada, ou seja, o conjunto (par ordenado) $<x, x>$. Como diz Hodges (Hodges, 1983, p. 69), seria bom se encontrássemos uma teoria Δ em *L* na qual os modelos são exatamente as *L*-estruturas com a identidade-padrão (isto é, com a diagonal do domínio). Porém, *não há tal teoria*. Para toda *L*-estrutura U com a identidade-padrão é possível provar que existe uma *L*-estrutura B, a qual é modelo das mesmas sentenças de *L* como U, *mas que não tem a identidade-padrão* (a prova pode ser vista na bibliografia citada). Este fato é usualmente expressado dizendo que a identidade não é uma relação de primeira ordem "elementar" (Deutsch, 2008). Dito de forma coloquial, o fato de assumirmos – como fizemos acima – um predicado binário para representar a identidade, *por si só não nos garante que semanticamente esse predicado irá realmente representar o que temos intuitivamente como sendo a identidade em todas as estruturas da linguagem L*.

Não obstante, existe uma teoria Δ de *L* que será verdadeira em todas as *L*-estruturas com a identidade-padrão. Isto é, pode-se assumir certos postulados que irão sempre funcionar para todas as sentenças verdadeiras de *L* em todas as estruturas de *L*. De certo modo, pode-se dizer que esses postulados irão 'reger' (isto é, axiomatizar) o predicado acima de modo que o 'force' a representar o que temos intuitivamente como sendo a identidade. Os postulados que temos que assumir e que irão 'governar' a identidade são os seguintes:[6]

1. **[Lei da Reflexividade ou Princípio da Identidade da lógica elementar]:** $(\forall x(x=x))$.
2. **[Substitutividade]:** $\forall x \forall y(x=y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$, onde $A(x)$ é uma fórmula qualquer que contém a variável x livre, e $A(y)$ resulta da anterior pela substituição de x por y em algumas das ocorrências livres de x, desde que a variável y seja livre para x em $A(x)$.

É fácil ver que toda a estrutura de *L* com a identidade-padrão (diagonal do domínio) é um modelo de 1 e 2 acima. A partir desses postulados, e dos demais axiomas do Cálculo Quantificacional Clássico, pode-se provar que a igualdade é simétrica e transitiva. Além disso, com tais postulados e teoremas também se pode provar que a identidade na lógica clássica tem as propriedades de uma relação de congruência, ou seja, é uma relação que preserva as propriedades dos objetos. Isso também vale para as relações de qualquer aridade, como, por exemplo, as binárias: se temos que aRb, e que $a=c$ e $b=d$, então também temos que cRd. Isto é importante porque a congruência é uma relação de equivalência, de modo que podemos particionar o domínio no qual ela se aplica 'separando' os indivíduos em classes de equivalência de elementos. Na lógica elementar, no entanto, não podemos quantificar sobre propriedades ou relações (coisa que como dissemos pode ser feita em lógicas de ordem superior), e desta forma os postulados acima nos proveem somente um *esquema*. Isso ocasiona o seguinte (Mendelson, 1979, p. 83-84; French e Krause, 2006, p. 251ss.).

Semanticamente, como enfatizado, o predicado = deve ser entendido (já que temos como pano de fundo uma interpretação pretendida ou intencional) como representando a identidade do domínio da interpretação da nossa linguagem *L*. Como dissemos, na semântica usual, esse domínio é um conjunto não vazio *D*, e a identidade sobre *D* é tomada como sendo o subconjunto $\Delta_D=\{<x, x> : x \in D\}$ (a diagonal de *D*). Não obstante, o problema é que os postulados 1 e 2 acima *não ga-*

[6] Historicamente, estes postulados são atribuídos a Frege em seu *Begriffsschrift* de 1879. Para uma visão mais moderna, pode-se consultar, por exemplo, as obras Mendelson (1979, p. 79); Hodges (1983, p. 69) e Church (1956, p. 280ss.).

rantem que essa interpretação seja realizada de forma não ambígua. Dito de outra forma, *eles não 'fixam' a interpretação* como desejado. O motivo é o seguinte.[7]

Chamemos de ρ_1 a função denotação que associa aos símbolos não lógicos de *L* os elementos de uma estrutura U=<D, ρ_1> que tem D $\neq \varnothing$ como domínio.[8] Então, supostamente $\rho_{1(\approx)}=\Delta_D$. Suponha agora que B=<D*, ρ_2> seja uma outra estrutura na qual interpretamos *L* de forma que o domínio D* seja o conjunto D*=D/$_R$ (o conjunto quociente de D pela relação 'R', que já sabemos é uma relação de equivalência, ou seja, que interpreta $\approx$ na estrutura B*,* mas não necessariamente a identidade de D*), e que $\rho_{2(\approx)}=\Delta_{D^*}$. Os elementos de D* são, assim, as classes de equivalência da forma $[x]_R$ com $x \in D$: $[x]_R=\{y \in D : yRx\}$. Definamos agora a função f*:* D$\rightarrow$D do seguinte modo: para cada $x \in$D, pomos $f(x)=[x]_R$. Não é difícil provar que vale o seguinte:

(a) $<f(x), f(y)> \in \Delta_{D^*}$ se, e somente se, $<x, y> \in \Delta_D$. Ou seja, as classes de equivalência $f(x)=[x]_R$ e $f(y)=[y]_R$ são iguais (têm os mesmos elementos) se, e somente se, *x* e *y* são o mesmo elemento.
(b) se *P* é um predicado de peso *n*, então sabemos que $\rho_1(P)$ é um subconjunto de D^n e que $\rho_2(P)$ é um subconjunto de D^{*n}. Então, $\rho_1(P)(x_1, \ldots, x_n)$ se, e somente se, $\rho_2(P)(f(x_1), \ldots, f(x_n))$.

De forma coloquial, o que este resultado mostra é que a linguagem de primeira ordem *L* não consegue diferenciar entre as interpretações dadas para o símbolo de igualdade em U e em B (isto é, entre a interpretação "na diagonal dos *objetos*" do domínio, e a interpretação "na diagonal das *classes de equivalência*" do domínio). Do ponto de vista formal, essas estruturas são elementarmente equivalentes: todas as fórmulas da linguagem que são verdadeiras em uma delas são verdadeiras em outra; todo elemento do domínio D* age como um elemento de D também; o que vale para *x*, *y* etc., também vale para *f*(*x*), *f*(*y*) etc. É isto que se quer dizer quando afirmamos que tais postulados não conseguem fixar a interpretação dada à identidade como seria desejável. Como mostrado por (Mendelson, 1979, p. 83), para a identidade em primeira ordem *é sempre possível provar a existência de tal f*, e assim sempre incorrer neste problema.

A identidade como conceito definido

Ainda nas linguagens de primeira ordem, uma outra alternativa possível é tratar a identidade como um conceito definido. Neste caso, ela pode ser introduzida *por definição* ao se assumir na linguagem *L* uma *fórmula* adequada (por exemplo, *C*(*x*,*y*), contendo *x* e *y* livres) para expressar a noção de identidade. Perceba o leitor que aqui falamos de uma fórmula, e não como acima apresentado de um predicado binário, de modo que neste caso não precisamos mais escrever axiomas específicos para reger essa fórmula. Assim, podemos definir que

$$x=y =_{def} C(x, y).$$

Por exemplo, suponha que tenhamos uma linguagem de primeira ordem com um número finito de símbolos de predicados (digamos, apenas dois: um unário *P*

[7] Usaremos neste ponto o símbolo '$\approx$' para denotar a igualdade na linguagem, e o símbolo '=' para denotar a igualdade na metalinguagem. O motivo disto ficará explícito no texto.
[8] Sobre a definição de estrutura, veja a seção "Indiscernibilidade em uma estrutura".

e um binário *Q*) e de constantes. O modo de tratar a identidade como um conceito definido é então *esgotar todos esses predicados em todas as possíveis substituições de x por y*. Dito de outra forma, neste caso o que se busca é definir a identidade de dois objetos como a possibilidade de que *valha a substitutividade para todas as propriedades expressas pela/na linguagem*. Sendo assim, neste exemplo, a fórmula *C*(*x*,*y*) se tornaria o segundo membro de

$$x=y =_{def} (Px \leftrightarrow Py) \wedge \forall z((Qxy \leftrightarrow Qyz) \wedge (Qzx \leftrightarrow Qzy)).$$

A diferença, apesar de à primeira vista parecer supérflua, é enorme. Segundo Krause (s.d.), esta definição é a usada por Quine (embora originalmente apresentada por Hilbert e Bernays), que reconhece que a definição da identidade via 'exaustão das combinações possíveis' (como Quine mesmo chama) é apenas um *"fac-símile servil"* [serviceable facsimile] da noção de identidade. Isto porque pode acontecer apenas que os objetos não sejam discerníveis completamente um dos outros *por meio dos predicados existentes na linguagem* e, neste caso, a definição – nas próprias palavras de Quine – "falha em definir a identidade genuína", pois todos aqueles objetos que teriam os mesmos conjuntos de predicados seriam reconhecidos (pela teoria) como sendo o mesmo objeto, coisa que não necessariamente é verdadeira (Quine, 1986, p. 63). Ainda mais, termina ele, "tal falha permanece inobservável a partir da linguagem". Dado que esta definição representa unicamente uma indiscernibilidade relativa aos predicados da *linguagem*, ela não se configura uma identidade *tout court* (isto é, do modo que temos intuitivamente).[9] De todo modo, perceba que nesta posição de Quine ainda permanece a ideia de que os objetos possuem um conjunto de propriedades e que se *todas* essas propriedades são partilhadas, estaríamos tratando do mesmo objeto, o mesmo indivíduo (o grande problema, como dito, é que, ao se ficar restrito ao que a linguagem está expressando, isto pode não ser verdadeiro).

Com efeito, tal problema se torna realmente perene quando constatamos que podemos apresentar uma estrutura formal na qual dois objetos distintos estão relacionados pela identidade *a là* Quine, *sem no entanto serem o mesmo objeto*. Em tal caso, novamente a interpretação da identidade não coincide com a diagonal do domínio e, assim, a noção intuitiva de identidade também acaba por não ser capturada pela definição proposta por Quine. Apesar de apenas esboçarmos o argumento aqui, vamos ver em linhas gerais como isso se acontece (Da Costa *et al*., 2012; Krause, s.d.).

Para tanto, tome qualquer elemento fixo *a* do domínio D da estrutura U acima e o substitua pelos pares ordenados <a, 1> e <a, 2>, obtendo assim um novo conjunto D' de U'. Podemos em seguida definir por indução sobre as fórmulas da linguagem as condições que devem ser satisfeitas pelos elementos de D' para que estes satisfaçam as fórmulas dessa linguagem: para quaisquer objetos distintos dos pares introduzidos acima, postulamos que eles satisfazem os predicados e relações na linguagem em U' se, e somente se (see), satisfazem esses predicados e relações em U. Para os pares <a, 1> e <a, 2> recém introduzidos, por sua vez, dizemos que eles satisfazem uma fórmula em U' sse o elemento *a* acima tomado satisfaz essa fórmula em U, e assim por diante. Diferentemente do que tínhamos anteriormente, no qual existia apenas um objeto igual a si mesmo em U, agora temos dois que sabemos serem diferentes, mas que não podem, devido às definições empregadas, ser diferenciados nessa estrutura por nenhuma fórmula da linguagem

[9] Vale ressaltar, inclusive, que esta definição só 'alcança' domínios com cardinalidade mentor que $\aleph_0$, haja visto que se presume que os objetos tenham apenas uma quantidade contável de propriedades (Deutsch, 2008).

L. Dito de outro modo, "não há nenhuma fórmula da linguagem tal que um dos pares ordenados a satisfaz, mas o outro não e, assim, na definição de identidade apresentada acima, [...] teremos que os dois objetos distintos do domínio irão satisfazer a fórmula que define a identidade, sem que, no entanto, sejam o mesmo objeto" (Da Costa *et al.*, 2012). É nesse sentido que é problemático termos apenas uma indiscernibilidade relativa aos predicados da nossa linguagem, como dito, e não uma identidade preeminente, no sentido de não estar dependente do que a nossa linguagem pode (ou está) exprimindo. O mesmo argumento pode ser generalizado para *n* novos objetos que inserirmos em nosso domínio, o que mostra a limitação de tal alternativa, como queríamos enfatizar.

Identidade em linguagens de ordem superior

A distinção entre lógica de primeira ordem e de ordem superior aparece explicitamente somente a partir de 1928 com livro de Hilbert e Ackermann, publicado em inglês como *Principles of theoretical logic*. Na lógica de ordem superior, pode-se quantificar sobre propriedades ou sobre conjuntos de indivíduos (no caso, em segunda ordem), ou sobre propriedades de propriedades ou conjuntos de conjuntos (no caso, em terceira ordem), e assim por diante. Deste modo, em segunda ordem, como cada propriedade corresponde (extensionalmente) a um subconjunto de números naturais, falamos de $2^{\aleph_0}$ propriedades.

Através da formulação da identidade nas linguagens de ordem superior (teoria de tipos), conseguimos escapar da principal dificuldade das linguagens de primeira ordem, a saber, o fato de que os axiomas para a identidade apenas axiomatizam uma relação de congruência que nem sempre é a diagonal do domínio. Entretanto, mesmo em ordem superior, a teoria da identidade mostra limitações. Não obstante, primeiramente vamos ver como se dá a edificação de tal conceito nessa teoria (no caso, aqui, ficaremos restritos à lógica de segunda ordem), e posteriormente apresentaremos as limitações.

Em segunda ordem, podemos introduzir uma relação de igualdade por definição. Dito de outra forma, é possível aqui encontrar uma fórmula da linguagem que tem as variáveis *x* e *y* como suas únicas variáveis livres, e a qual sempre possui o valor de verdadeiro ou falso de acordo com *x* ou *y* ter ou não ter o mesmo valor (Church, 1956, p. 300). Esta fórmula que introduz a identidade por definição é denominada por muitos de *Lei de Leibniz* (LL).

Sendo assim, tome *F*, por exemplo, como sendo uma variável para predicados de dois indivíduos *x* e *y*. Adaptando uma definição proposta por Whitehead e Russell (apresentada em seus *Principia Mathematica*), a LL se torna

$$x=y =_{def} \forall F(F(x)\leftrightarrow F(y)).$$

O segundo membro da definição expressa a indiscernibilidade (ou indistinguibilidade). Neste sentido, a identidade é definida em termos de indiscernibilidade: entidades indiscerníveis são idênticas (são a mesma entidade), de modo que novamente aqui a individualidade vem à tona. A partir dessa fórmula e das regras de derivação da lógica, todas as outras leis que regem a identidade (bem como alguns dos seus metateoremas) podem ser provadas (veja Church, 1956, p. 301ss.).

Desta forma, nesta lógica, objetos que satisfazem exatamente os mesmos predicados deveriam ser o mesmo objeto – ou como estamos aqui assumindo; o mesmo indivíduo. Não obstante, isso não funciona! Mostraremos que *podemos exibir em tal arcabouço teórico objetos que satisfazem os mesmos predicados, mas que sabemos que não são o mesmo objeto*, o que exatamente trará a lume as limitações das lógicas de ordem superior (French e Krause, 2006, p. 254ss.; Da Costa *et al.*, 2012). Para tanto, suponha que temos uma linguagem de segunda ordem (ou mais alta) em que a identidade é introduzida via LL como descrito acima. Supomos que esta linguagem contém variáveis individuais *x*, *y*, *z* etc. (com ou sem índices), e variáveis X_n para predicados, onde *n* é a aridade do predicado em questão. Podemos estabelecer, como de hábito, uma interpretação *I* para esta linguagem que associa um elemento de um domínio não vazio *D* a cada variável individual, e uma relação R_n sobre *D* a cada variável para predicados X_n da linguagem.

Também como de hábito, uma estrutura-padrão para esta linguagem é aquela que contém relações para todos os símbolos de predicado. Similarmente, podemos definir para a lógica de segunda ordem os conceitos de verdade e de falsidade (em uma interpretação) , bem como o de satisfatibilidade, estendendo sem dificuldade os conceitos semânticos habituais, além de ser possível provar um teorema de correção para este cálculo (Church, 1956, p. 307ss.; Mendelson, 1997, p. 373ss.). Todavia, não vale a recíproca (*i.e.*, o teorema da completude) para esta lógica, haja vista que as lógicas de segunda ordem são incompletas relativamente à sua semântica, tal como mostra o segundo teorema da incompletude de Gödel. Apesar disso, Henkin (Church, 1956) demonstrou um teorema 'mais fraco' de completude para a lógica de segunda ordem com relação às chamadas "Estruturas de Henkin"; estruturas nas quais não estão envolvidas todas as relações sobre o domínio, mas somente algumas devidamente escolhidas. Nas estruturas de Henkin, por exemplo, o domínio de variação de uma variável para predicados unários não é o conjunto potência *D* (o conjunto de todos os subconjuntos de *D*), mas uma subcoleção escolhida desse conjunto.[10] Para se fundamentar uma semântica sensata para as lógicas de segunda ordem em uma estrutura de Henkin, exige-se que sejam verdadeiras em tal estrutura todas as instâncias do chamado "Esquema de Compreensão" seguinte, onde $F(x_1, \ldots, x_n)$ é uma fórmula qualquer na qual a variável para predicados não figura livre:

$$\exists X_n \forall x_1 \ldots \forall x_n (X_n(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n)).$$

A partir disso é possível então garantir, como dito, uma forma 'fraca' de completude. Não obstante, desta forma *a definição de identidade segundo a LL dada acima deixa de ser a identidade intuitiva*: com efeito, podemos agora apresentar um contraexemplo no qual objetos *distintos* satisfazem a definição de identidade via tal lei (Krause, s.d.). Para tanto, suponha que nossa linguagem de segunda ordem contenha duas constantes *a* e *b*, e três predicados unários P_1, P_2 e P_3. Suponha também que tenhamos escolhido uma estrutura de Henkin que tem por domínio o conjunto D={1, 2, 3, 4, 5}, e que contenha as relações unárias $R_1=\{1, 2, 5\}$, $R_2=\{1, 2, 3, 4\}$ e $R_3=\{1, 2, 4\}$ que interpretam os três predicados dados. O que ocorre é que, se interpretarmos *a* e *b,* respectivamente, como 1 e 2, então $a=b$ (ou seja, 1=2) é verdadeira nessa estrutura pois 1 e 2 pertencem a todas as relações. Com efeito, de acordo com a LL, $a=b \leftrightarrow \forall F(F(a) \leftrightarrow F(b))$, e isto é o que ocorre, pois a variável *F* percorre um domínio constituído unicamente por R_1, R_2 e R_3. Se a interpretação for entretanto a padrão, obviamente $a = b$ valerá se e somente se *a* e *b*

[10] Formalmente, o que acontece é que em um modelo standard para as teorias de ordem superior deveríamos levar em conta todos os subconjuntos de objetos de um determinado tipo, que Church (1956, p. 307) chama de "principais". O problema, como dissemos, é que no caso das lógicas de ordem superior não se tem um teorema de completude para a semântica standard. Podemos tentar remediar tal problema utilizando uma semântica de Henkin na qual os modelos (chamados modelos de Henkin) são tais que os quantificadores percorrem apenas determinados subconjuntos de objetos de determinado tipo, garantindo assim uma forma mais 'fraca' de completude. Uma apresentação informal e popular de tal característica da lógica de segunda ordem aparece no artigo "Completude", do próprio Leon Henkin, que se encontra em (Henkin, 1975).

denotarem o mesmo objeto, pois neste caso estarão envolvidos *todos* os subconjuntos do domínio. Todavia, não é isso que acontece exatamente pelas 'condições' que são impingidas à semântica de Henkin. Como diz Krause (s.d.), "isso mostra que a relação de identidade entre dois objetos depende não somente da particular interpretação escolhida, mas de maneira mais profunda, da matemática utilizada para construir a semântica".

De toda forma, como conclusão parcial, podemos seguramente afirmar que a lógica usual em geral é leibniziana em certo sentido. Isto porque podemos unicamente selecionar alguns predicados e relações, e falar em uma indiscernibilidade relativa apenas a essas propriedades e relações, de modo que não se permite assim que se fale de objetos absolutamente indiscerníveis sem que disso resultem ser o mesmo objeto (ou, como estamos assumindo aqui, o mesmo *indivíduo*, já que antes chamamos de indivíduo exatamente os objetos que 'respeitam' a teoria da identidade da lógica clássica). Dito de outra forma, se adotarmos a hipótese de que um indivíduo é um objeto que possui um conjunto de propriedades só seu (excetuando-se aqui a discussão de que tipo de propriedades são essas), a partir da discussão acima podemos perceber como a lógica em sentido amplo também assume tal postura e, assim, se compromete com a individualidade de seus elementos, haja visto que a 'intenção formal' da lógica clássica é a de representar – malgrado sua problemática – a visão de que não há dois objetos que partilhem de todas as suas propriedades sem que com isso sejam o mesmo objeto, o mesmo indivíduo. Entremeado ao texto que decorre, falaremos mais sobre isso.

Identidade na teoria de conjuntos

Passaremos agora a ver como se dá a assunção da noção de identidade nas teorias usuais de conjuntos – que, como dissemos, estão por hipótese alicerçando a matemática –, e como nestas teorias também parece que nos comprometemos com pressupostos ontológicos acerca da individualidade.

Nas teorias usuais (extensionais) de conjuntos clássicas, formuladas como teorias de primeira ordem, podemos supor que a lógica alicerçando tais teorias seja a lógica clássica e que a linguagem contenha os mesmos símbolos lógicos da lógica elementar mencionados acima, apenas acrescidos de um único símbolo de predicado binário "$\in$" (pertinência). O conceito de identidade na teoria de conjuntos (TC) pode ser tratado de várias maneiras. Uma primeira delas é adotar um predicado de identidade como primitivo em uma linguagem de primeira ordem e reger tal conceito por axiomas específicos, tal qual a primeira forma mostrada anteriormente para a lógica de 1ª ordem (todavia aqui assumindo também postulados específicos para o trato conjuntista). Uma segunda opção é também tratá-lo *à la* Quine, isto é, como um conceito definido na linguagem da teoria – no caso, podemos assumir a linguagem da teoria de ZFC[11] –, o que é possível dado que a teoria em apreço tem apenas um número finito de predicados primitivos. Neste caso, $x=y$ pode ser definido pela fórmula $\forall z(z\in x \leftrightarrow z\in y)$. Uma última possibilidade é ainda introduzi-lo como conceito definido de uma linguagem de *segunda ordem*, expressando assim a identidade através da LL. Habitualmente, em ZFC, procedemos de acordo com o primeiro modo.

[11] Zermelo-Fraenkel com axioma da escolha ['C' de Choice] sem a adoção dos chamados Urelemente (átomos). Átomos não são conjuntos, mas podem ser elementos de conjuntos. A teoria de conjuntos ZFC é uma das mais usuais teorias de conjuntos, sendo que por isso será tomada como principal caso de estudo deste trabalho.

Sendo assim, como a lógica que está embasando ZFC é a lógica clássica, podemos fazer uso dos postulados 1 e 2 acima e, em especial para esta teoria de conjuntos, postulamos que

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \rightarrow x = y,$$

expressão que é chamada de *axioma da extensionalidade* (AE) e que em certo sentido é tomada como sendo a propriedade conjuntista da igualdade. Dada a lógica clássica, são teoremas em ZFC todas as propriedades lógicas da igualdade, além da substitutividade em relação à pertinência.[12] O AE em ZFC intuitivamente afirma que quaisquer que sejam dois conjuntos x e y, se x e y têm exatamente os mesmos elementos, então x e y são o mesmo conjunto; são iguais. É importante destacar isso: a partir da identidade em lógica e do AE, podemos caracterizar os conjuntos obtidos em ZFC como providos de uma *identificação*, ou seja, conseguimos saber quando dois conjuntos são iguais (o mesmo) ou não, sendo estes assim 'comprometidos' com uma teoria da identidade (e assim de individualidade) para seus objetos. Isto é possível porque, como valem as leis da lógica clássica, tem-se que para quaisquer x e y, ou temos que $x=y$ ou que $x \neq y$ (vale o princípio do terceiro excluído e da não contradição). O aspecto relevante de tal característica é que, se $x \neq y$, então existe (neste caso extensional) um atributo ou uma propriedade que ou x ou y possui, mas não o outro[13], ou dito de outra forma, que há um conjunto ao qual apenas um deles pertence (via o princípio da compreensão de que falaremos abaixo).[14]

A forma como a noção de identidade é entendida na TC – a partir principalmente do AE – advém diretamente do modo que tal teoria foi primeiramente concebida e estabelecida historicamente. Com efeito, George Cantor (1845-1918), o principal criador da teoria intuitiva de conjuntos, já afirmava que "por um conjunto entendemos um agregado de objetos que são *distintos* em nossa intuição ou pensamento e que podem ser combinados em um um todo por alguma lei" (*cf.* French e Krause, 2006, p. 258, grifo meu). Segundo French e Krause (2006), a caracterização de conjuntos na formulação primária de Cantor captura então os seguintes aspectos intuitivos: (i) os elementos de um conjunto são agrupados por uma certa 'lei', *i.e.*, é uma 'lei' que faz com que certos objetos possam ser vistos como formando uma totalidade ("elementos *de* um conjunto"); (ii) o conjunto é determinado pelos seus elementos; (iii) *os elementos de um conjunto devem ser distintos um do outro*; e (iv) os elementos de um conjunto são de algum modo dados antes do que o próprio conjunto.

Para os autores, estas quatro características sugerem quatro princípios formais básicos que subjazem à noção de conjunto, a saber:

1') *o princípio da compreensão (ou abstração)*, o qual basicamente significa que dada uma 'propriedade' ou 'condição' P qualquer, existe o conjunto (*único*) dos objetos que têm essa propriedade ou que cumprem essa condição. Em símbolos, podemos expressar esse princípio da seguinte forma, sendo $F(x)$ uma propriedade aplicável aos objetos de um certo domínio:

$$\exists y \exists x(x \in y \leftrightarrow F(x))$$

[12] Neste caso, o teorema é $\forall x \forall y(\forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z) \leftrightarrow x = y))$.

[13] Esta é a contrapositiva do AE.

[14] Isto é válido porque em teorias de conjuntos extensionais podemos formalmente assumir que uma propriedade pode ser caracterizada extensionalmente pelo conjunto dos objetos que caem sob ela (como, por exemplo, "o conjunto de pessoas que gostam de filosofia", o "conjunto de objetos de cor amarela", e assim por diante). Se a propriedade tomada for "ser idêntico a si mesmo", o conjunto possuirá somente um elemento; neste caso, somente um indivíduo.

Como os próprios autores enfatizam (French e Krause, 2006, p. 261), "according to this theory, as we have seen, there is no place for 'indistinguishable' objects, that is, for entities which differ solo numero: if they differ, there exists a set which corresponds to a property to which one of them belongs while the another one does not."

Entretanto, vale mencionar que este princípio (bastante intuitivo por sinal) é que levou a paradoxos como o de Russell e à(s) tentativa(s) de axiomatização da TC. Não iremos reproduzir tal história aqui, mas basta dizer que, na axiomatização de ZFC, o princípio da compreensão de Cantor foi 'corrigido' de modo a se evitar o paradoxo de Russell. Assumiu-se então o chamado *esquema da separação*, o qual assevera que, dada uma fórmula $F(x)$ de ZF (uma 'propriedade'), na qual a variável y não figura livre, então são axiomas cada uma das expressões obtidas do seguinte esquema mediante $F(x)$'s distintas:

$$\forall z \forall y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge F(x)).$$

Intuitivamente, o esquema acima diz que, dado um conjunto z, podemos obter um subconjunto de z tomando aqueles dentre seus elementos que têm uma determinada propriedade. A diferença aqui é que o conjunto do qual extraímos os objetos com a propriedade $F(x)$ *já está dado de antemão*, e isso evita os paradoxos dedutíveis do princípio da compreensão acima. Outrossim, dado que temos a ideia intuitiva de que cada objeto é um indivíduo idêntico apenas a si mesmo, novamente podemos sempre formar um subconjunto contendo apenas *um* elemento (ou um indivíduo): a saber, exatamente o que tem a propriedade $x = x$. Deste modo, podemos perceber que, apesar de corrigido em ZF, o esquema da separação mesmo assim mantém a ideia original do princípio da compreensão, qual seja, de que sempre existem *propriedades individualizadoras de que podemos lançar mão a fim de obter um indivíduo* (no caso, um conjunto com apenas *um* elemento), e que novamente um objeto (indivíduo) é definido pelas suas propriedades;

2') *o princípio da extensionalidade,* que como já pontuamos de certo modo diz que coleções com os mesmos elementos não podem ser distintas ou, dito de outra forma, um conjunto é determinado pelos seus elementos (pela sua extensão);

3') o conceito da *identidade dos elementos de um conjunto*: como os elementos de um conjunto devem ser distintos uns dos outros, é de se supor que valha alguma teoria da identidade para tais elementos, ou seja, dado x e y, deve ser sempre possível asseverar se $x = y$ ou se $x \neq y$. Dado que a lógica clássica está baseando tal teoria, já mostramos como isso ocorre;

4') *o conceito interativo de conjunto*: os elementos de um conjunto são dados, de certo modo, antes do conjunto propriamente.

Para a discussão tida neste trabalho, o que importa ressaltar é que, a partir dos princípios básicos que a TC deve respeitar (posteriormente refletidos na própria axiomática), pode-se seguramente perceber como a noção de conjunto está também firmemente atrelada à noção da identidade e individualidade de seus objetos. Como vimos, a partir do AE, *se tivermos dois conjuntos com os mesmos elementos, estamos apenas nomeando um mesmo conjunto de um modo diferente* (novamente uma visão fregeana). Do mesmo modo, *se tivermos dois conjuntos com elementos diferentes, esses conjuntos – nesta teoria extensional – são diferentes por alguma propriedade* (o que outra vez mostra o paralelo da concepção de identidade e individualidade assumida nesta teoria com a identidade e individualidade presente na lógica clássica). Soma-se a tal argumentação, como vimos, o fato histórico de que os próprios conjuntos da noção cantoriana são "coleções de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou pensamento", os quais só podem ser tratados como tais nos sistemas axiomáticos que apresentarem identidade (ou que respeitem alguma teoria da identidade, no caso aqui da lógica clássica que está embasando ZFC). Outrossim, apesar das limitações existentes, vimos que a lógica clássica parece se comprometer com noções de individualidade, e dado que esta é a lógica que subjaz à teoria conjuntista, também aqui nos enredamos com a noção de indivíduo – tanto informalmente como formalmente – do princípio ao fim. Em resumo, os axiomas conjuntistas – somados aos axiomas lógicos – fornecem uma caracterização do conceito de igualdade na teoria de conjuntos que com tais alicerces formais torna os seus 'entes' como sendo passíveis de serem rotulados e identificados individualmente como objetos definidos e distintos; e que aqui também sejam *indivíduos* em toda a acepção da palavra. Com efeito, Potter afirma isso com todas as letras: "os membros de um conjunto são ou todos conjuntos ou *todos indivíduos*" (2004, p. 47, grifo meu).

Como é bem sabido, por sua vez, podemos fundamentar a matemática usual em uma teoria de conjuntos como a de ZFC, haja visto que suas estruturas fundamentais podem ser erigidas em tal teoria.[15] Dito de outro modo, afirmar que a matemática clássica pode fundamentar-se numa teoria de conjuntos como a de ZF significa dizer que se podem erigir os conceitos usados em tal disciplina (funções, derivadas, integrais, etc.) utilizando construtos conjuntistas. Se partirmos do pressuposto de que a teoria de ZFC está então assentada sobre princípios que concebem seus elementos como indivíduos em alguma acepção, podemos então afirmar que a matemática também apresenta os mesmos comprometimentos individualizantes tal qual a teoria conjuntista Com efeito, se a TC se compromete com algumas posições, a matemática erigida nessa teoria não pode se abster de também se comprometer com essas posições: obviamente, se em nosso alicerce temos uma certa 'configuração estrutural', tal estruturação irá se propagar pelo nosso edifício (formal) inteiro. Sendo assim, podemos afirmar *que tudo leva a crer* que a matemática erigida em uma teoria de conjuntos em que a noção de indivíduo é perene também se torna individualizadora, já que parece altamente razoável dizermos que a matemática está sim comprometida com alguma noção de indivíduo se tal comprometimento está se apresentando desde as próprias teorias lógicas e conjuntistas onde ela se assenta. De certa forma, é como se a matemática fosse assim 'maculada' – *ab initio* – por tais preceitos teóricos. Todavia, vale ressaltar que este é um ponto de vista ou uma *possibilidade* de se entender os objetos matemáticos, a qual nem de longe é consensual. Com efeito, para outros autores, a matemática seria ontologicamente neutra (esta é, por exemplo, a posição de Bunge, 1977). Dado que a matemática não 'fala por si', nossa contenda não pode ser provada de forma definitiva e se torna assim uma *posição* ontológica: a prova que podemos dar para tal posição é o que enfatizamos no decorrer deste texto, ou seja, mostrando vários argumentos que acreditamos que fortalecem a visão de que a matemática também 'trata' de indivíduos. Ainda falaremos mais sobre tal partido.

Não obstante a teoria de conjuntos se comprometer ou não com indivíduos, como tal teoria se assenta na lógica clássica, os problemas que vimos acima relativos à definição do conceito de identidade naquela disciplina acabam por 'contaminar' também a teoria conjuntista. Poderíamos pensar que dado tal fundamento lógico não teríamos escapatória, e que sempre estaríamos assim fadados a ter tal "calcanhar de Aquiles". Não obstante, veremos a seguir que temos sim uma possibilidade de fugir a esta problemática. Esta consiste em assumir uma noção mais fraca de 'identidade', a saber, a da *indiscernibilidade* entre os objetos apenas *relativamente*

[15] É claro que a teoria de conjuntos não é o único lugar onde pode ser assentada a matemática: também existem abordagens em que assentam a matemática na teoria das categorias, ou em lógicas de ordem superior, ou até mesmo em alguns tipos de mereologias, existindo assim diversas maneiras de fundamentarmos o que usualmente é chamado de matemática clássica. Todavia, como dito no texto, a teoria de conjuntos (aqui em especial a teoria de ZFC) é a teoria mais usual onde a matemática é normalmente assentada, bem como também é a mais utilizada no discurso filosófico.

a uma certa estrutura conjuntista. Contudo, como veremos, certas particularidades de tais estruturas também irão acabar por refletir – e até mesmo fortalecer – a ideia de que a teoria de ZFC (e assim a matemática) realmente se compromete com a individualidade dos seus objetos. Exploraremos tais características agora.

A força da linguagem conjuntista: indiscernibilidade em uma estrutura

Um modo objetivo de avaliarmos a capacidade expressiva da linguagem da TC é analisar como podemos efetivamente tratar de entidades indiscerníveis no contexto de alguma teoria que faça uso da mesma. Aqui continuaremos a tratar apenas da teoria de ZFC assumindo o axioma da regularidade ou da fundação: $\forall x(x\neq\emptyset\rightarrow\exists y(y\in x\wedge x\cap y=\emptyset))$.

Para mostrar como conseguirmos manipular objetos (no plural) indiscerníveis em ZFC, precisamos do conceito de *estrutura.* Devido a uma noção de espaço, não mostraremos aqui como podemos construir uma estrutura matemática conjuntista a partir de uma hierarquia cumulativa (Potter, 2004, p. 72-73), mas adotaremos o modo como ela é definida usualmente; o qual já servirá para os nossos propósitos. Deste modo, em ZFC, uma estrutura matemática (de primeira ordem) pode ser *grosso modo* definida como uma sequência finita de conjuntos-base – que podem ser reduzidos a apenas um – e de relações sobre esses conjuntos (que também são operações conjuntistas). Esses conjuntos-base formam o chamado domínio da estrutura, de modo que uma estrutura é assim um construto matemático abstrato de natureza conjuntista.

De um ponto de vista mais formal, *embora resumido*, as estruturas em ZFC podem ser apresentadas como uma *n*-upla ordenada da seguinte forma:

$$U=\langle D, R_i\rangle_{i\in I},$$

onde D é um conjunto não vazio (o domínio da estrutura), e $(R_i)_{i\in I}$ representa uma família de relações sobre D (cada uma com uma certa aridade *i*, sendo *I* um conjunto de índices). Um exemplo bastante comum de estrutura é a estrutura de grupos: $\mathcal{G}=\langle G, *\rangle$, sendo *G* um conjunto não vazio, e * uma operação binária sobre *G*, ou seja, uma função $G\times G\mapsto G$ a qual associa a cada par $\langle a, b\rangle$ de elementos de $G\times G$ um elemento $a*b$ de *G*. Se * cumpre os conhecidos postulados de grupo, teremos uma *espécie de estruturas* de grupo para empregar a terminologia de Bourbaki: os grupos propriamente ditos são então as estruturas dessa espécie. Segundo Krause (2002, p. 79) e Krause e Coelho (2005), devido às dificuldades antes mencionadas para o trato da identidade na lógica clássica, parece que somente podemos falar em identidade relativizada a uma certa estrutura matemática, pois aqui temos a vantagem de se poder contar com a noção de distinguibilidade (respect., indistinguibilidade) somente *relativa a uma estrutura particular*.

Para vermos como isso pode ser estabelecido, primeiramente temos que definir a noção de *automorfismo entre estruturas*. De maneira geral, um autormorfismo em uma estrutura $U=\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ é uma função bijetiva $h: D\rightarrow D$, tal que se $R_i(x_1, \ldots, x_n)$, então $R_i(h(x_1), \ldots, h(x_n))$ para toda relação R_i de aridade *n*. Dito de outra forma, um automorfismo na estrutura U é uma bijeção de $D\mapsto D$ que preserva cada função de U, cada relação de U e o complementar de cada relação de U.[16] A coleção desses

[16] Fácil se vê que, na matemática, um automorfismo é um isomorfismo de um objeto (ou conjunto) matemático nele mesmo.

automorfismos forma um outro grupo chamado de grupo dos automorfismos da estrutura U, ou grupo de Galois de U (Da Costa e Rodrigues, 2007). Desta forma, os automorfismos da estrutura $\mathcal{G}$ acima, por exemplo, são as funções bijetivas $f{:}G \to G$, tais que $x*y=f(x)*f(y)$.

A partir da definição de automorfismo, podemos introduzir uma outra noção, a saber, a de *distinguibilidade relativa a uma estrutura*, na qual desempenha um papel central a noção de invariância sob automorfismos (Gelowate *et al.*, 2003):

> **Definição:** *Seja U uma estrutura, e a e b elementos do domínio D dessa estrutura. Diz-se que a e b são U-distinguíveis (ou distinguíveis em U) see existe um subconjunto $X \subseteq D$ tal que:*
> 1. *X é invariante sob os automorfismos de D, ou seja, f(X)=X para todo automorfismo f de A;*
> 2. *$a \in X$ see $b \notin X$.*
>
> *Caso contrário, dizemos que a e b são U-indistinguíveis (ou indistinguíveis em U).*

Sendo assim, dois elementos *a* e *b* de uma estrutura U são indiscerníveis (ou indistinguíveis) com respeito à estrutura se existe um automorfismo *h* de U tal que $h(a)=b$. Como *h*, por ser bijetiva, é inversível, sua inversa também é um automorfismo da estrutura, e sendo assim *b* também é levado em *a* por um autormorfismo (precisamente h^{-1}). Em contextos extensionais (tal qual ZFC), podemos afirmar que dois elementos são U-indistinguíveis *quando eles pertencem às mesmas coleções de elementos do domínio que são (tais coleções) invariantes sob os automorfismos da estrutura* (Gelowate *et al*., 2003). Deste modo, do ponto de vista intuitivo, por exemplo, com o objetivo de considerar dois objetos *a* e *b* como indistinguíveis, o que necessitamos então é 'esquecer' certas propriedades distintivas que eles podem ter e considerar, numa certa estrutura, somente aquelas que são relevantes para os propósitos que temos em mente, mas que não são suficientes para reconhecê-los como indivíduos distintos, isto é, *só admitirmos como meio de distinção entre objetos as propriedades determinadas por essa estrutura* (ficando assim restritas à estrutura considerada).

Vamos a um exemplo. Suponhamos que na estrutura $\mathcal{G}$ acima, *G* seja o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros e * seja a operação + (de adição de inteiros), de modo que então obtemos a estrutura $\mathcal{Z}=\langle\mathbb{Z}, +\rangle$. Agora tomemos uma função $f{:}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definida por $f(x)=-x$ para $\forall x\in\mathbb{Z}$, que como facilmente se vê é um automorfismo de $\mathcal{Z}$. Então podemos mostrar que o grupo de Galois de $\mathcal{Z}$ tem somente dois elementos: a função identidade $i(x)=x$ (*que é sempre um automorfismo*), e a função $f(x)=-x$. *Assim, para qualquer que seja $x\in\mathbb{Z}$, temos que x e $-x$ são $\mathcal{Z}$-indistinguíveis na estrutura.* Isto acontece exatamente porque *não conseguimos diferenciar x de -x a partir dos automofismos* (recursos) existentes na estrutura: como *x* 'é levado' a *-x* por um dos automorfismos definidos na estrutura, *dentro dessa estrutura x é igual a -x*. Todavia, sabemos que 2 e -2, por exemplo, são diferentes, mas isso não pode ser visto *a partir* da estrutura em apreço, permanecendo estes objetos assim indistinguíveis.

Estruturas rígidas

Uma estrutura é *rígida* se seu grupo de Galois é unitário e composto *apenas pelo automorfismo dado pela função identidade*. Sendo assim, as estruturas rígidas são exatamente aquelas nas quais a indistinguibilidade (relativa a uma estrutura, tal como foi definido acima), e a identidade (aqui entendida do modo usual; como sendo o mesmo objeto), *realmente* coincidem. Veja que numa estrutura rígida, como a identidade e a indiscernibilidade estão coincidindo, fazemos uso de *todas* as propriedades e não apenas (tal como feito na seção anterior) das que são invariantes sob os autormorfismos da estrutura considerada. Importante dizer que a indistinguibilidade relativizada a um universo de ZFC *coincide com a identidade usual*, já que, sendo *V* o universo de ZFC, a estrutura $B=<V, \in>$ (que digamos é a 'estrutura de ZFC') *é rígida* (e assim também são todas as estruturas que têm por base essa teoria conjuntista), o que novamente reforça a tese discutida acima da identidade expressando uma individualidade também na teoria de conjuntos usual.[17]

Não obstante, em nosso exemplo acima, 2 e -2 (bem como quaisquer outros dois inteiros opostos) estão indiscerníveis na estrutura $\mathcal{Z}=<\mathbb{Z}, +>$, pois $f(2)=-2$ e as relações da estrutura não são suficientes para discernir n de $-n$. Do modo definido, tal como vimos, esta estrutura possui então dois autormorfismos, ou seja, duas bijeções de $\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ que preservam as operações da estrutura. Logo, tal estrutura não é rígida. Mas esta estrutura está mergulhada em um universo de ZFC (ou seja, é uma estrutura que tem por alicerce a teoria de ZFC), e dissemos acima que a estrutura $B=<V, \in>$, sendo *V* o universo de ZFC, é rígida, de forma que todas as estruturas nela erigidas também devem ser rígidas. Isso seria uma contradição? Negativo, pois isso não quer dizer que x e $-x$ não possam ser discernidos de outra forma: com efeito, a rigidificação da estrutura acima (e assim a discernibilidade no sentido de identidade entre 2 e -2) pode sim ser alcançada formalmente, apesar disso poder ser percebido somente 'de fora' da estrutura original $\mathcal{Z}=< \mathbb{Z}, + >$, ou seja, exatamente no contexto de $B=<V, \in>$ onde ela está mergulhada. O motivo disso é devido a um importante teorema que diz que ***toda** estrutura de ZFC não rígida pode ser estendida a uma estrutura rígida pelo acréscimo de finitas relações de primeira ordem.*[18] Isso pode ser feito de várias formas, mas para a discussão do presente artigo nos basta apresentar uma possibilidade. A estrutura do exemplo acima pode ser transformada em uma estrutura rígida acrescentando-se a ela novas relações (no caso, unárias) que consistem de todos os subconjuntos unitários dos elementos de $\mathbb{Z}$ (que logicamente correspondem à propriedade "ser idêntico a si mesmo"). Deste modo, obtemos $\mathcal{Z}'=<\mathbb{Z}, +, \{0\}, \{1\}, \{-1\},...>$, que como facilmente se vê é rígida: agora, 2 e -2 podem ser discernidos pela propriedade "ser idêntico a 2" que é satisfeita por 2, mas não por -2.[19] Todavia, como dito, esse fato se prova 'fora' da estrutura original $\mathcal{Z} = <\mathbb{Z}, +>$, isto é, na sua extensão feita no universo de ZFC onde a estrutura $\mathcal{Z}$ está fundamentada.

De toda forma, isso quer dizer que mesmo que tenhamos *dois* (ênfase em "dois") objetos *a* e *b* indiscerníveis relativamente a uma estrutura qualquer *A* (utilizando para tanto a 'tática' mostrada na seção anterior), se esta estrutura estiver alicerçada em ZFC, ela pode ser estendida a uma outra estrutura *A*' na qual 'se pode ver' que eles são elementos (e assim indivíduos) distintos. Moral da história: em ZFC, todo objeto é efetivamente um indivíduo, no sentido de que pode sempre ser discernido de qualquer outro distinto dele, mesmo que para isso tenha que se estender (no sentido de rigidificar) a estrutura à qual o objeto pertence. Como conclusão, pode-se dizer que em ZFC não há não indivíduos 'legítimos'! Como dizem Gelowate *et al*. (2003), tal como também já enfatizamos, isso é claramente mais um indicativo

[17] A prova de que na "estrutura de ZFC" não existem automorfismos distintos da identidade pode ser encontrada em (Jech, 1997, p. 73). Não obstante, é bom enfatizar que a estrutura $B=<V, \in>$ (a "estrutura de ZFC") não pode ser construída em ZFC, já que é um modelo de ZFC. Isso porque, se conseguíssemos construir tal estrutura em ZFC, estaríamos provando a completude de ZFC no próprio ZFC, o que não é permitido devido ao segundo teorema de incompletude de Gödel (supondo ZFC consistente).

[18] Prova-se isso utilizando alguns teoremas relativos a isomorfismos e automorfismos (Da Costa e Rodrigues, 2007).

[19] Outra forma de se fazer isso é ampliar $\mathcal{Z}$ com a introdução da relação de ordem padrão $<$, obtendo assim $\mathcal{Z}''=<\mathbb{Z}, +, < >$.

do comprometimento de ZFC (e da matemática nela erigida) com uma ontologia de indivíduos, já que o mesmo também vai acontecer em estruturas mais gerais.

Estruturas adequadas para descreverem certas áreas da matemática, bem como certas teorias físicas (ou para serem modelos dessas teorias), obviamente terão que ser bem mais complexas do que as descritas acima. Eis alguns exemplos. No caso da matemática, da mesma forma que temos a estrutura para grupos antes mostrada, temos a estrutura (não rígida) $\mathfrak{C}=<C, +, . , 0, 1>$ que corresponde ao corpo dos complexos (nesta estrutura, a função que associa a um número complexo o seu conjugado é um automorfismo de $\mathfrak{C}$ que não é a função identidade), e a estrutura (também não rígida) $\mathcal{B}=<E, K, +, . >$ dos espaços vetoriais sobre um corpo K (onde E é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados de "vetores"), cada uma delas satisfazendo os postulados correspondentes. Para teorias físicas ocorre algo parecido, embora as estruturas que 'representem' algum domínio físico não serão em geral de ordem-1.[20] Por exemplo, para representarmos a mecânica clássica de partículas de um ponto de vista estrutural, uma das possibilidades é definirmos uma estrutura da forma $M=< P, T, s, m, f, g>$, onde P é um conjunto das 'partículas'; T é um conjunto que representa a coleção de instantes de tempo (em geral, um intervalo fechado da reta real); s é uma 'função posição' de uma partícula em um tempo dado; m é uma função de P em $\mathbb{R}^+$ (que representa a massa das partículas); enquanto que f e g são funções que correspondem às forças internas e externas do sistema, tudo isso obedecendo a certos axiomas (ver Suppes, 1957, p. 291ss.). Para a mecânica quântica não relativística, segundo Dalla Chiara e Toraldo Di Francia (1979), podemos ter algo como $Q=<M_0, S, Q_0, \ldots, Q_n, \varrho>$, onde M_0 é o modelo da análise funcional *standard* (onde podemos desenvolver a teoria dos espaços de Hilbert); S é um conjunto cujos elementos são chamados de sistemas físicos; os Q_i representam observáveis físicos; e ϱ é uma função que associa a cada $s \in S$ um adequado espaço de Hilbert em M_0, e a cada Q_i um operador linear hermitiano sobre os espaços de Hilbert relevantes, novamente tudo isso satisfazendo determinados axiomas. Não obstante, em todos esses casos a ideia básica permanece sendo a mesma: temos conjuntos e relações sobre os elementos desses conjuntos, e como podemos construir tais estruturas em ZFC, se as mesmas não forem rígidas podemos sempre falar de elementos indiscerníveis relativamente a uma estrutura que poderão ainda assim ser distinguidos de 'fora' da estrutura original (no caso extremo, no universo $B=<V,\in>$ como vimos). Isso leva, como enfatizado, ao comprometimento com indivíduos em todo o nosso enredamento lógico-conjuntista-matemático onde estão sendo construídas nossas estruturas para teorias físicas, de modo que, paralelamente ao que foi discutido em seções anteriores, agora os próprios objetos da física também podem ser nesse sentido dotados de uma individualidade! Com efeito, tal 'dependência' também é destacada por (French e Krause, 2006, p. 246):

> One might say that it is not only classical mechanics that uses concepts taken from our ordinary experience, but classical mathematics (and logic) in a certain sense, do so as well. For instance, when someone thinks of a set, he or she intuitively thinks of a collection of 'classical objects', like those of our surroundings, hence individuals [...]. So, based as they are on standard mathematics, physical theories become in a

[20] A linguagem da teoria de conjuntos, como vimos, é uma linguagem de primeira ordem, mas todavia tal linguagem é tão forte que pode ser utilizada para construir estruturas que não são de ordem-1. Isto porque não devemos confundir a ordem da linguagem com a ordem das estruturas que são nela erigidas: se as relações da estrutura têm como relata apenas indivíduos de D, então a estrutura é de ordem-1 (é o que acontece, por exemplo, com a estrutura de grupo); se os relata das relações da estrutura são subconjuntos de elementos de D (ou propriedades de indivíduos em contextos extensionais), então a estrutura é de ordem-2, e assim por diante. Isto mostra que podemos construir estruturas de ordem-n mesmo em linguagens de primeira ordem.

> certain sense dependent [...] on such mathematics, and a physical theory based on classical logic and mathematics cannot dismiss the theorems of such a logical and mathematical basis.

Não seguiremos na particular análise da individualidade dos objetos físicos em relação ao formalismo que os subjazem por não ser o objetivo desse artigo.[21] Para nós, em resumo, o que importa é apenas enfatizar que, em todas as situações matemáticas em que podemos trabalhar com estruturas da forma $U=<D, (R_i)_{i \in I}>$, estas são erigidas em uma teoria de conjuntos.[22] Sendo assim, todas as considerações teóricas desenvolvidas nesta teoria se aplicam àquelas situações: no caso da matemática usual, também construída por exemplo em ZFC, podemos levar em conta a indiscernibilidade unicamente mediante determinadas restrições, o que equivale ao confinamento a determinadas estruturas não rígidas. A grande dificuldade, nesse caso, é que mesmo para aquelas estruturas com vários automorfismos distintos da identidade sempre é possível enriquecer tais estruturas de modo a obter novas estruturas que são por sua vez rígidas e que permitem assim uma identificação e individuação plena dos objetos. Parafraseando Lewis Carroll, ainda aqui (nas estruturas não-rígidas) 'o sorriso do *indivíduo* permanece'.

A 'semântica de um indivíduo'

Nesta última seção deste artigo, discutiremos outros argumentos que podem fortalecer a visão de que a lógica, em especial, parece realmente assumir que seus objetos têm algum tipo de individualidade. Dado que a teoria de conjuntos pode ser fundamentada na lógica clássica, e dado que a matemática pode ser fundamentada na teoria de conjuntos (em especial a de ZFC), a individualidade transparece do início ao fim, tal como já pontuamos.

Na lógica clássica, todas as vezes em que falamos das constantes individuais *a*, *b* etc., parece que intuitivamente estamos sempre nos remetendo a algum indivíduo: com efeito, entre outras coisas, isso se mostra na própria nomeação das constantes individuais como *a*, *b*, *c* etc., identificando-as assim univocamente.[23] Deste modo, se realmente a lógica se compromete com a visão de que seus 'entes' são dotados de individualidade, quais seriam as características de um indivíduo do ponto de vista desta disciplina?[24] Dentre as possibilidades de resposta, tentemos a que emerge da semântica aceita em tal lógica. A semântica tarskiana usual da lógica clássica também é extensional no sentido antes discutido: propriedades são idênticas se têm a mesma extensão, e a extensão de um predicado é o conjunto de coisas às quais ele se aplica. Neste sentido, a extensão do predicado "moradores de Florianópolis", por exemplo, é também aqui o conjunto de todos os moradores (pessoas, indivíduos) de Florianópolis. Nesta semântica extensional, como se sabe, a cada variável proposicional se assinala um valor de verdade, a cada nome se assinala um elemento *único* do domínio, e a cada predicado *n*-ário se assinala uma *n*-upla de elementos do domínio. Deste modo, a fórmula $\exists xP(x)$ é verdadeira se a extensão de *P* não for vazia (ou seja, see houver pelo menos um objeto do domínio satisfazendo a expressão

[21] Para mais detalhes, veja a bibliografia indicada.
[22] E a quantidade de tais situações é significativa, haja visto que, segundo alguns filósofos, boa parte da matemática e da ciência aplicada poderiam ser reduzidas ao conceito de estrutura (veja, Da Costa e French, 2003).
[23] Veja o leitor o caráter individualizador do próprio termo "constante individual" (que como defendemos aqui, é bem delimitado).
[24] Veja que novamente não queremos saber quais são as características de um indivíduo tout court (que é algo filsoficamente complexo, como já dito), mas apenas como tais objetos são tratados na lógica clássica.

$P(x)$), e a fórmula $\forall x P(x)$ é verdadeira see a extensão de P coincide com o domínio D (ou seja, se todos os objetos do domínio 'caem' no predicado P). Vemos assim como tudo isso enfatiza que os 'valores das variáveis', isto é, os objetos que são associados às variáveis da linguagem, são indivíduos de alguma forma: no escopo da lógica clássica atual, dizer que existe um objeto x que tem certa propriedade (se isso for considerado 'verdadeiro') significa dizer que existe um conjunto não vazio de objetos ao qual o referido objeto pertence. Se por sua vez o predicado tomado for "idêntico a si próprio", apenas um objeto estaria no conjunto: exatamente o único *indivíduo* que é idêntico a si próprio, tal qual o caso antes discutido para a teoria de conjuntos usual. No mesmo sentido, e isso também é importante, se tivermos dois predicados com a mesma extensão (como, por exemplo, "a primeira presidenta do Brasil" e "ex-ministra chefe da casa civil"), então segundo esta semântica estes dois predicados têm o mesmo referente *único* (no caso, o *indivíduo* Dilma Rousseff). Isto novamente mostra como a quantificação e a semântica usual da lógica clássica realmente nos compromete com hipóteses ontológicas acerca da individualidade de seus entes: existe somente um objeto que é Dilma Rousseff, que é a primeira presidenta do Brasil e que é ex-ministra chefe da Casa Civil (e claro, que detém mais outros predicados), e *qualquer 'outro' objeto com esses mesmos predicados é o mesmo objeto; o mesmo indivíduo.*[25] Por fim, novamente se ressalta que a semântica apresentada é conjuntista: realizada em uma teoria de conjuntos (coisa que muitas pessoas não percebem prontamente), na qual os conceitos de "função", "par ordenado", etc. podem ser adequadamente definidos. Com efeito, como vimos, uma interpretação nesta semântica é um *conjunto* não vazio (chamado de domínio da interpretação); cada letra de predicado, sendo uma relação n-ária sobre os objetos do domínio, perfaz assim *subconjuntos* do domínio; e cada letra funcional é uma *função* de $D \rightarrow D$. Tal construto conjuntista nos faz voltar novamente ao que foi antes defendido, a saber, que, se a teoria de conjuntos também parece se comprometer com a visão individualizadora de seus elementos via extensionalidade, este fato – se aceito – se transfere naturalmente também à semântica extensional da lógica clássica.

Outrossim, segundo as regras da lógica clássica, do ponto de vista *sintático*, se temos uma sentença como "Aristóteles é filósofo", podemos representá-la em nossa linguagem por Fa, sendo F – como dito acima – um símbolo para predicado unário ("ser filósofo") e a uma constante *individual* ("Aristóteles"). Também podemos substituir a constante por uma variável, (digamos, "x") obtendo "x é filósofo" (ou seja, $F(x)$), e depois disto ainda ligar a variável por meio do emprego de um quantificador existencial, obtendo $\exists x F(x)$. Por Modus Ponens, se temos $F(a)$, podemos derivar que existe um x tal que x é filósofo, ou seja, podemos derivar $\exists x F(x)$.[26] De tais características sintáticas seguem-se todas as demais propriedades clássicas dos quantificadores. Neste sentido, vale a pena então relembrar a posição de Quine para quem nos comprometemos ontologicamente com aquelas entidades que podem ser valores de variáveis ligadas das sentenças da linguagem que usamos (que para ele era uma linguagem de primeira ordem com identidade). Diz este autor que

> *ser assumido como uma entidade é, pura e simplesmente, ser reconhecido como o valor de uma variável.* [...] As variáveis da quantificação [...] percorrem toda a nossa ontologia, qualquer que seja ela; e ficamos atados [convicted] a uma pressuposição *ontológica* particular se, e somente se, o pretenso pressuposto tiver que ser reconhecido entre as entidades que nossas variáveis percorrem a fim de tornar uma de nossas afirmações verdadeiras (Quine, 1980, p. 232, grifo meu).

[25] Perceba novamente o caráter fregeano dessa construção.
[26] Isso se deve ao princípio de Generalização Existencial (EG), que neste caso fica $F(a) \rightarrow \exists x F(x)$.

Neste caso, a partir da 'estrutura' sintática da lógica clássica, "o valor de uma variável" pode bem ser um *indivíduo*, isto é, um particular bem definido que satisfaz a teoria da identidade da lógica e da matemática usuais, de modo que assim ficamos atados também *ontologicamente* a tal concepção de individualidade, consoante ao defendido por Quine. Por fim, tudo isso vai ao encontro de outra visão de Quine, a saber, de que não há entidade sem identidade, como expressado na passagem: "temos uma noção aceitável de conjunto, de objeto físico, de atributo, ou de qualquer outro tipo de objeto, *somente na medida em que temos um princípio de individuação aceitável para aquele tipo de objeto. Não há entidade sem identidade*" (Quine, 1981, p. 102, grifo meu). Tal posição leva Quine em outro momento a inclusive indagar sobre "qual o sentido em falar em falar de entidades às quais não se pode dizer significativamente que são idênticas a si mesmas e distintas uma das outras?" (Quine, 1980, p. 225). Logo se vê que em todas as passagens citadas as entidades que Quine tem em mente para a lógica e matemática clássica são em certo sentido cantorianas, possuindo assim um critério de identidade e de individualidade (pelo menos intencionalmente) bem definido. Este indivíduo único implica que ele possa ser re-conhecido, identificado e individualizado como tal em diversos contextos[27], ele pode receber um nome de modo a poder ser reconhecido como o objeto tal e qual, possui – como dito – identidade (inclusive, segundo o dicionário de Aulete [2009, p. 446] individualidade *é* identidade), suas coleções podem ser numeradas e ordenadas; eu posso, de um modo um tanto coloquial, 'apontar' para ele e dizer "este é o mesmo objeto que eu tinha antes!".[28]

Podemos reconstruir a mesma argumentação para compreender o que é suposto como entidade *a la* Quine agora por uma teoria de conjuntos como ZFC para a qual, como visto, valem as propriedades lógicas e conjuntistas da igualdade. Além disso, vale ressaltar que todas essas considerações acima também vão ao encontro – ainda na teoria de conjuntos intuitiva – com ideias que espelham (*grosso modo*) a visão de Leibniz. Com efeito, segundo este autor em seu "Discurso da Metafísica" (Leibniz, 1980), "não ser verdade [existir] duas substâncias assemelharem-se completamente e diferirem apenas solo-número", ou mais particularmente na passagem da sua obra "A Monadologia" (Leibniz, 1989, seção 9), onde diz "que nunca há, na natureza, dois seres que sejam perfeitamente idênticos e nos quais não seja possível encontrar uma diferença interna, ou fundada em uma denominação intrínseca". Isso mostra mais uma vez que é legítimo entender essa discussão como apontando para a interpretação de que indivíduos distintos não podem ter todas as mesmas qualidades ou, dito de outra forma, que indivíduos iguais (no sentido de partilharem todas as mesmas características) são o mesmo indivíduo, a ponto de "se considerarmos a possibilidade de afirmar, de quaisquer duas entidades em ZFC, que elas são iguais ou distintas como sendo o critério que as individualiza, podemos assertar que ZFC afirma a existência de indivíduos. Enfatizemos: ao adotar a teoria da identidade usual, ZFC se compromete com indivíduos" (Gelowate, 2003)

Durante o desenvolvimento histórico da lógica clássica, a noção de objeto – bem como a noção semântica extensional – sempre foram assentadas sobre tais distinções de individualidade e identidade. Talvez tal procedimento tenha assim se constituído devido ao fato de que (como dito na introdução) entendemos via de regra os objetos usuais que nos cercam como sendo individualizados e dotados

[27] É claro que para tanto os predicados que caem sobre o indivíduo x devem ser os mesmos em qualquer desses contextos.

[28] Com efeito, o *Dicionário Básico de Filosofia* de Japiassu e Marcondes (2008, p. 146) fala exatamente isso: "*Indivíduo:é algo que possui características próprias que o distinguem das outras coisas*" (grifo meu).

de um tipo de identidade, de modo que os 'objetos' da lógica também acabaram sendo 'munidos' de individualidade e identidade, espelhando assim a maneira que entendemos os objetos em geral.[29] Essa também é a posição de (Da Costa, 1980, p. 56 ss.), para o qual a atividade científica – mesmo em lógica e em matemática – depende de uma intuição intelectual que forjamos tendo em vista nosso contato com o contorno. Essa atividade é construtiva, diz ele, pressupondo algo comparável à aritmética intuicionista e, desse modo, *supondo o conceito intuitivo de identidade*. Assim, continua o autor, da mesma forma que a mecânica clássica trata de objetos físicos que têm características que se assemelham aos objetos que nos cercam e que podem assim ser contados, individualizados, respeitarem o princípio da impenetrabilidade, etc.[30], as teorias de conjuntos usuais (e logo a matemática erigida a partir dela) tratam seus 'objetos' da mesma forma, incorporando – como já afirmado – os conceitos acima de individualidade e identidade.

O filósofo Ferdinand Gonseth (1890-1975) afirmava que "a lógica é a física do objeto qualquer" (Gonseth, 1936, p. 155 *in* Krause, 2002, p. 179), querendo com isso dizer que os princípios lógicos deveriam expressar as leis mais elementares e gerais e se basseariam em uma espécie de evidência que seria típica das leis físicas: seus princípios não deveriam ser tornados mais independentes dos assuntos empíricos, por meio de abstrações, do que o são as leis da física em relação aos fenômenos. Esta face empírica da lógica implicaria, assim, que esta poderia depender do domínio de conhecimento sob análise, e entre os filósofos que partilham desta posição também poderíamos citar Putnam (1968) e Destouches-Fevrier (1951).[31] Se tomarmos essa afirmação como verdadeira, a saber, que a lógica é uma forma de 'captar a realidade', podemos então entender por que ela aparenta ser individualizadora: tudo leva a crer que é assim que vemos o mundo e que, como dito, é assim que o espelhamos nas nossas teorias matemáticas que modelam tal 'visão de realidade'.

Conclusão

Neste trabalho pretendemos mostrar principalmente como a matemática, a lógica e a teoria de conjuntos estão comprometidas com pressupostos ontológicos sobre a individualidade (no sentido de identidade) de seus objetos. Para fazermos isso, tivemos que mostrar como a identidade é erigida nessas disciplinas e como a individualidade emerge de tal formalismo, bem como a problemática existente em cada uma dessas construções.

Aqui tentamos patentear que, como tais teorias formais são fundamentadas na Lei de Leibniz (para a qual não há objetos [no plural] indiscerníveis, pois colocar duas coisas indiscerníveis é colocar a mesma coisa com dois nomes), temos sim boas razões para aceitar essa posição individualizadora dos entes matemáticos. Esta faceta individualizadora dos objetos formais pode parecer natural, mas, como tentamos mostrar neste artigo, não é. Com efeito, a individualidade dos objetos da matemática se mostra também de um modo 'contrapositivo', a saber, quando tentamos trabalhar com os objetos quânticos que podem partilhar de todas as propriedades sem serem o mesmo objeto, sendo assim passíveis de serem toma-

---

[29] O que se quer dizer com isso é que a lógica, em certa acepção, foi 'contaminada' (inclusive metafisicamente) pela noção de objeto que temos do mundo que nos rodeia.
[30] É claro que esse ponto necessita de qualificação. Com efeito, no mundo real não existe um corpo "perfeitamente inelástico" por exemplo. Mas para efeito de cálculo, tudo se passa como se os corpos que nos rodeiam fossem mesmo como são descritos nas teorias da mecânica clássica.
[31] Jammer (1974, capítulo 8.6), em *The Philosophy of Quantum Mechanics*, apresenta várias outras referências neste sentido e discute um pouco desse tópico.

dos como não indivíduos em certo sentido (French e Krause, 2006). Neste caso, só conseguimos utilizar a matemática clássica assumindo assunções externas à teoria física em apreço, o que realmente mostra que o comprometimento com indivíduos aparenta acontecer efetivamente no arcabouço fundamental matemático clássico e que outros entendimentos para os objetos das nossas teorias (e da nossa realidade) também sejam possíveis de ser buscados.[32]

Referências

AULETE, C. 2009. *Minidicionário contemporâneo da língua portuguesa*. Rio de Janeiro, Lexidon, 896 p.

BUNGE, M. 1977. *Treatise on basic philosophy (vol. 3, ontology 1): the furniture of the world*. Dordrecht, Reidel, XVI-354 p.

CHURCH, A. 1956. *Introduction to mathematical logic*. Princeton, Princeton University Press, 396 p.

DA COSTA, N.C.A. 1980. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo, Hucitec/EdUSP, 255 p.

DA COSTA, N.C.A.; FRENCH, S. 2003. *Science and partial truth: a unitary approach to models and scientic reasoning.* New York, Oxford University Press, 259 p. http://dx.doi.org/10.1093/019515651X.001.0001

DA COSTA, N.C.A.; RODRIGUES, A.A.M. 2007. Definibility and invariance. *Studia Logica*, **86**(1):1-30. http://dx.doi.org/10.1007/s11225-007-9049-6

DA COSTA, N.C.A.; KRAUSE, D.; ARENHART, J.R.B.; SCHINAIDER, J. 2012 Sobre uma fundamentação não reflexiva da mecânica quântica. *Scientia Studia*, **10**(1):71-104. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-31662012000100004

DALLA CHIARA, M.L.; TORALDO DI FRANCIA, G. 1979. Formal analysis of physical theories. *In:* G. TORALDO DI FRANCIA (ed.), *Problems in the Foundations of Physics*. North-Holland Editor, p. 134-201.

DESTOUCHES-FEVRIER, P. 1951. *La structure des theories physiques*. PUF, Paris, XI-423 p.

DEUTSCH, H. 2008. Relative identity. The Stanford Enciclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition). Disponível em: http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/identity-relative/. Acessado em: 14/02/2012.

FRENCH, S.; KRAUSE, D. 2006. *Identity in physics: a historical, philosophical and formal analysis*. New York, Oxford University Press, 448 p. http://dx.doi.org/10.1093/0199278245.001.0001

GELOWATE, G.; KRAUSE, D.; COELHO, A.M.N. 2003. Observações sobre a neutralidade ontológica da matemática. *Episteme*, **17**:145-157.

GONSETH, F. 1936. *Les mathematiques et la realité*. Paris, Librairie Blanchard, XI-386 p.

HENKIN, L. 1975. Completude. *In:* S. MORGENBESSER (org.), *Filosofia da Ciência*. São Paulo, Ed. Cultrix, p. 65-80

HODGES, W. 1983. Elementary predicate logic. In: *Handbook of philosophical logic - vol. 1: elements of classical logic*. Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, p. 1-120. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-7066-3_1

JAMMER, M. 1974. *The philosophy of quantum mechanics*. New York, John Wiley and Sons, 536 p.

JAPIASSU, H.; MARCONDES, D. 2008. *Dicionário básico de filosofia.* 5ª ed., Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 309 p.

JECH, T. 1997. *Set theory*. Heildeberg, Springer, 769 p. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-22400-7

KRAUSE, D. 2002. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. São Paulo, E.P.U., 211 p.

KRAUSE, D. [s.d.]. *Identidade e indiscernibilidade*. [no prelo].

KRAUSE, D.; COELHO, A. 2005. Identity, indiscernibility, and philosophical claims. *Axiomathes*, **15**(2):191-210. http://dx.doi.org/10.1007/s10516-004-6678-5

[32] Sobre a discussão relativa à problemática de se tratar no formalismo quântico objetos indiscerníveis modo matemática clássica, bem como as pressuposições externas à teoria quântica que necessitam ser assumidas para que isso funcione (além de uma possível lógica e uma teoria de conjuntos não individualizadora) (French e Krause, 2006).

KUNEN, K. 2009. *The Foundations of Mathematics*. London, College Publications, 262 p.

LEIBNIZ, G. 1980. *Discurso sobre a metafísica*. São Paulo, Ed. Abril, 350 p. (Col. Os Pensadores).

LEIBNIZ, G. 1989. *Monadologia.* São Paulo, Ed. Abril, 350 p. (Col. Os Pensadores).

MENDELSON, E. 1979. *Introduction to mathematical logic.* 2ª ed., New York, D. van Nostrand Company, 328 p.

MENDELSON, E. 1997. *Introduction to mathematical logic.* 4 ª ed., London, Chapman and Hall, 494 p.

POTTER, M. 2004. *Set theory and its philosophy: A critical introduction.* Oxford, Oxford University Press, 360 p. http://dx.doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199269730.001.0001

PUTNAM, H. 1968. Is logical empirical? *In:* R.S. COHEN; M.W. WARTOFSCKY (eds.), *Boston studies in the philosophy of science.* Dordrecht, D. Reidel, vol. 5., p. 216-241. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-3381-7_5

QUINE, W.V. 1980. *Sobre o que há.* São Paulo, Abril Cultural, 290 p. (Col. os Pensadores).

QUINE, W.V. 1981. On the individuation of attributes. *In:* W.V. QUINE, *Quine, Theories and Things*. Cambridge, Harvard University Press, p. 100-112.

QUINE, W.V. 1986. *Philosophy of logic*. Cambridge, Harvard University Press, 128 p.

SUPPES, P. 1957. *Introduction to logic*. New York, van Nostrand Reinhold Company, 330 p.

Submitted on May 28, 2014
Accepted on May 12, 2015