Filosofia Unisinos
Unisinos Journal of Philosophy
17(1):40-49, jan/apr 2016
Unisinos – doi: 10.4013/fsu.2016.171.05

Alegatos contra el superplatonismo de Balaguer

Pleas against Balaguer's superplatonism

Matías Alejandro Guirado[1]

RESUMEN

Mark Balaguer ha elaborado una peculiar variante del platonismo matemático –denominada '*full-blooded platonism*' o 'FBP'– para solucionar el problema de Benacerraf sobre la inaccesibilidad de las entidades abstractas. Según FBP, todos los objetos matemáticos consistentemente caracterizables existen, aunque de modo contingente. En este trabajo quisiera mostrar que la plenitud ontológica y la contingencia modal no pueden converger en una teoría de objetos matemáticos filosóficamente respetable. Para esto argumento que FBP no cubre algunos factores elementales de confiabilidad epistémica y que envuelve un criterio de plenitud tanto matemática como metafísicamente implausible.

Palabras clave: Balaguer, Benacerraf, consistencia, contingencia, superplatonismo.

ABSTRACT

Mark Balaguer has developed a quirky brand of mathematical platonism – called 'full-blooded platonism' or 'FBP' – in order to solve Benacerraf's problem about the inaccessibility of abstract entities. According to FBP, every mathematical object that can consistently be characterized thereby exists, although contingently so. In this paper I would like to show that ontological plenitude and modal contingency cannot converge into a philosophically respectable theory of mathematical objects. To achieve this, I argue that FBP does not cover some basic factors of epistemic reliability and that it involves a criterion of plenitude both mathematically and metaphysically implausible.

Keywords: Balaguer, Benacerraf, consistency, contingency, superplatonism.

Introducción

El platonismo matemático es la visión de que los objetos matemáticos son entidades platónicas, es decir, entidades causalmente inertes existentes fuera del espaciotiempo. El principal obstáculo que enfrenta esta visión es uno de orden epistemológico. Dado que nuestros recursos cognitivos se desenvuelven en el mundo espaciotemporal y los objetos matemáticos no forman parte de ese mundo, se dificulta seriamente explicar cómo accedemos a ellos. Paul Benacerraf (1973) ha planteado expresamente el problema y sus ramificaciones filosóficas al modo de un dilema: si adoptamos el platonismo, no podremos explicar el conocimiento matemático; pero, si renunciamos al platonismo, no podremos forjar una semántica tarskiana para la matemática.

[1] Universidad de Buenos Aires. Viamonte 430/44, C1053ABJ. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina. E-mail: matias.ag@outlook.com

El cuerno epistemológico del dilema ha sido desafiado de muy diversas maneras. En este trabajo quisiera refutar lo que considero la estrategia más prometedora al respecto: la estrategia superplatonista de Mark Balaguer. Brevemente: se trata de expandir la ontología matemática hasta el límite de sus posibilidades lógicas, de manera tal que toda teoría matemática consistente caracterice alguna colección de objetos abstractos. El talón de Aquiles de esta estrategia pasa por su enfoque de la modalidad. En el contexto de FBP, la existencia de objetos matemáticos -al igual que la existencia de objetos ordinarios como árboles o asteroides- es una faceta lógicamente contingente de la realidad. Lo metafísicamente distintivo del reino matemático pasa exclusivamente por su *plenitud*: en el dominio de los objetos matemáticos -a diferencia de lo que sucede en el dominio de los objetos físicos ordinarios- la posibilidad lógica implica existencia. Mis objeciones contra FBP son dos: (i) la matemática no es todo lo plena que cabe suponer a la luz de FBP; (ii) la contingencia modal y la plenitud ontológica no pueden convivir armoniosamente. Por el lado epistémico, la síntesis de contingencia y plenitud impide asignar confiabilidad epistémica a nuestras creencias matemáticas. Por el lado metafísico, esa síntesis da estatus de verdades modales a una serie de consideraciones contrafácticas intuitivamente repudiables.

Mi plan de trabajo es el siguiente. En primer lugar, expongo el argumento epistemológico de Benacerraf y despliego el espacio lógico de las respuestas tradicionales a ese argumento. Mi objetivo es mostrar que ninguna de esas respuestas es satisfactoria. En una segunda instancia, paso a exponer la estrategia superplatonista de Balaguer. Primero, hago una presentación de FBP, poniendo particular énfasis en sus compromisos ontológicos y pragmáticos. Estas cuestiones serán relevantes, pues, según Balaguer, sólo FBP con su metafísica desbordante ofrece una reconstrucción adecuada de la metodología matemática. Luego exhibo los recursos epistemológicos de FBP y la respuesta al planteo de Benacerraf que emerge naturalmente de ellos. En tercer lugar, sostengo que, en rigor, FBP es incompatible con la matemática. Por una parte, hay teorías (presumiblemente) consistentes que, o bien no tienen modelo, o lo tienen pero no son legítimos a la luz de FBP. Por otra parte, Balaguer pretende achacar a la propia teoría de modelos estas fallas de plenitud, aduciendo consideraciones *ad hoc* que no hacen más que desvirtuar el pretendido naturalismo pragmático de FBP. En cuarto lugar, sostengo que la epistemología de Balaguer no garantiza el cumplimiento de algunas condiciones de confiabilidad epistémica bastante elementales: la exigencia de que nuestras creencias matemáticas (correctas) dependan contrafácticamente de los hechos matemáticos, y la exigencia de que la correlación entre creencias y hechos matemáticos no sea fortuita. Por último, demuestro que, si FBP es verdadero, entonces los objetos matemáticos tienen un estatuto metafísico-modalmente anómalo, en el sentido de que son objetos genuinamente matemáticos sólo en los mundos posibles donde FBP es (contingentemente) verdadero.

La objeción de Benacerraf

Paul Benacerraf (1973) planteó a los filósofos de la matemática un dilema aparentemente irresoluble. Ese dilema puede resumirse así: si postulamos las entidades cuya existencia se requiere al explicar la verdad matemática, entonces se hace imposible explicar el conocimiento matemático. Pero, si renunciamos a esa postulación, entonces no podremos reconstruir adecuadamente la noción de verdad matemática. Las apuestas de Benacerraf son: la teoría causal de conocimiento (TCC) y la semántica tarskiana (ST). A juicio de Benacerraf, TCC proporciona un marco universal para hacer epistemología, es decir, procura dilucidar las condiciones (necesarias y suficientes) que deben satisfacer nuestras creencias (acerca del mundo) para constituir conocimiento. Por su parte, ST funciona como una técnica general para reconstruir el comportamiento del predicado veritativo de un lenguaje L.

La aplicación de ST supone la confección de un listado de equivalencias materiales que señalan las entidades involucradas en la extensión del predicado veritativo y las condiciones para su empleo de hecho. Tradicionalmente, esas entidades son oraciones indicativas de L y sus condiciones de verdad están dadas por las circunstancias intuitivamente asociables a sus proferencias corrientes. Las equivalencias en cuestión son instancias del esquema:

(T) x es verdadera si y sólo si p,

donde x es sustituible por nombres de oraciones (siempre y cuando esas oraciones no contengan apariciones del predicado veritativo) y p es sustituible por una oración que expresa (quizá en otro idioma) lo mismo que la oración nombrada. Puesto que el abordaje es extensional, cada una de las instancias de (T) brindará "una definición parcial de la verdad de una oración [...], [una] explicación de varios giros del habla concretos del tipo 'x es una oración verdadera'" (Tarski, 1983, p. 155-156). Tomemos por caso la equivalencia material:

(1) '2 es par' es verdadera si y sólo si 2 es par.

La suboración que aparece a la derecha del 'si y sólo si' indica las condiciones (necesarias y suficientes) para aplicar el predicado 'es verdadera' a la suboración nombrada en la parte izquierda. Por añadidura, (1) brinda una definición parcial del predicado veritativo de la aritmética elemental.

La aplicación del predicado veritativo a '2 es par' hace suponer que tenemos acceso al número 2 y que estamos en condiciones de constatar que es un objeto par. ¿Cómo accedemos al número 2 y constatamos su paridad? Esta pregunta es crucial, porque "una explicación de la verdad matemática, para ser aceptable, debe ser consistente con la posibilidad de tener conocimiento matemático" (Benacerraf, 1973, p. 667). TCC impone al respecto el siguiente requisito: un sujeto X sabe que una oración S es verdadera si y sólo si la creencia de que lo es está causalmente vinculada con el hecho representado por S (o las condiciones de verdad de S) en algún sentido relevante.

> *Favorezco una teoría causal del conocimiento según la cual para que X sepa que S es verdadera se requiere que se obtenga cierta relación causal entre X y los referentes de los nombres, los predicados y los cuantificadores de S. Creo adicionalmente en una teoría causal de la referencia, convirtiendo en doblemente causal el vínculo con mi decir [...] que S (Benacerraf, 1973, p. 671).*

He aquí precisamente el meollo de la preocupación epistemológica: el conocimiento de que 2 es par es un requisito para predicar verdad de '2 es par'; ese conocimiento requiere a su turno alguna forma de acceso al número 2 y su paridad; y, a la postre, TCC nos dice que el acceso epistémico a un objeto supone la existencia de algún vínculo causal con él. Pero no podemos estar causalmente vinculados con el número 2, porque los objetos matemáticos son entidades no-espaciotemporales y, como consecuencia de esto, no pueden mantener vínculos causales con nada. Así pues, pareciera ser que las condiciones veritativas tarskianas de las teorías matemáticas sobrevienen "a partir de condiciones sobre objetos cuya naturaleza [...] los coloca fuera del alcance de los medios de cognición humana mejor comprendidos" (Benacerraf, 1973, p. 667).

El argumento epistemológico de Benacerraf ha estado expuesto a muy variados ataques. El más directo de ellos consiste en impugnar TCC[2]. Dado que -según se presume hoy día- no toda creencia justificada admite condiciones de confiabilidad causales[3], se ha sugerido que el problema no recae en los objetos matemáticos, sino en la teoría propuesta para explicar el acceso a ellos. Según Jerrold Katz, el planteo de Benacerraf "sólo muestra que no podemos llegar a conocer [objetos abstractos] del modo en que llegamos a conocer objetos concretos" (Katz, 1998, p. 27). Para Michael Resnik, ese planteo "sugiere una debilidad en la teoría causal" (Resnik, 1997, p. 191). Pero el tema de la causalidad es más bien secundario. En rigor, basta con suponer que una entidad carece de localización espaciotemporal para sospechar razonablemente que no podremos conocerla. Y cabe notar que la refutación de TCC no le resta ningún sustento a esta tesitura, dado que sus contraejemplos putativos atañen todos ellos al conocimiento de entidades espaciotemporales. En rigor, el que una entidad espaciotemporal sea cognoscible en ausencia de un contacto causal relevante con ella no implica de manera razonable que podamos tener conocimiento no-causal de entidades no-espaciotemporales.

Otra estrategia es postular una facultad de "percepción" suprasensible, confiando a su funcionamiento el que podamos constatar las propiedades elementales de los objetos matemáticos al desplegar intuitivamente los conceptos básicos de la matemática (*viz*, los conceptos de número y conjunto)[4]. Pero esta estrategia es que va a contramano de cualquier enfoque razonable (naturalizado) del conocimiento. Las caracterizaciones usuales de la "intuición platónica" envuelven diversas analogías con la percepción sensible de muy dudosa factura. Se dice, por ejemplo, que la intuición matemática involucra "algo así como una percepción" de objetos abstractos y que no hay "razón por la cual debamos tener menos confianza en ese tipo de percepción [...] que en la percepción sensible" (Gödel, 1947, p. 483), sin dar elementos que respalden el mentado paralelismo. En rigor, la "intuición matemática" no es más que un nombre para cierto sentimiento de certeza inmediata que acompaña a las creencias matemáticas más elementales. Los platonistas ortodoxos confunden el acceso al reino platónico con el acceso a los estados mentales propios vinculados con la elaboración de creencias matemáticas indubitablemente certeras.

Una tercera estrategia es atribuir espaciotemporalidad y eficacia causal a las entidades matemáticas. Tomemos el caso de los conjuntos naturalizados, es decir, aquellos que sólo contienen objetos físicos ordinarios dentro de su clausura transitiva. Presumiblemente, tales conjuntos comparten la localización espaciotemporal de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto {Torre Juche} comparte la localización espaciotemporal de la Torre Juche. Esto ha llevado a pensar que los conjuntos naturalizados son entidades perceptibles de manera ordinaria y que los axiomas conjuntistas usuales son maneras de desplegar los contenidos derivados de su percepción efectiva (ver Maddy, 1990). Pero el que un objeto sea perceptible no quiere decir que el conjunto que (presuntamente) lo contiene como elemento lo sea. La visión de la torre Juche -por ejemplo- debiera proporcionar información perceptiva de transfinitamente muchos conjuntos: los conjuntos {Juche}, {{Juche}}, {{{Juche}}}, etc. Pero todos estos conjuntos comparten la misma constitución material y la misma ubicación espaciotemporal (la de la torre Juche), con lo cual no podremos explicar su diferencia ontológica ni, por derivación, su perceptibilidad individual, sin postular un factor no-material y no-espaciotemporal, es decir, un factor imperceptible y expuesto a la preocupación de Benacerraf. Lo que realmente hay de conjuntista en los conjuntos naturalizados es *prima facie* inaccesible al conocimiento humano en general y a la percepción en particular.

Una cuarta estrategia es acotar la postulación de entidades abstractas en función de las demandas ontológicas de las ciencias naturales. Esta estrategia impone que los objetos matemáticos satisfagan el requisito de indispensabilidad teó-

[2] Ver por ejemplo Colyvan (2001), Hunter (1994) y Katz (1998).

[3] Algunos contraejemplos plausibles de TCC son las anticipaciones confiables de eventos futuros y el buen uso de predicados proyectables goodmanianos: ninguna de estas habilidades admite o supone una condición causal para la explicación de su confiabilidad epistémica.

[4] Algunos exponentes clásicos de este punto de vista son Gödel (1947) y Hunter (1994).

rica de Quine-Putnam para ser admitidos en nuestro sistema de mundo[5]. Pero con esto se renuncia a explicar la confiabilidad de la matemática no-aplicada, como así también el que las teorías matemáticas aplicadas hayan sido elaboradas originariamente en base a una metodología de trabajo ajena a los desarrollos de la ciencia. De hecho, la metodología científica ha ido en ocasiones a contramano de la metodología matemática: algunos científicos han desarrollado sus programas de investigación a costa de recursos matemáticos inconsistentes (piénsese en el cálculo infinitesimal de Newton y la teoría de las funciones impropias de Dirac), mientras que los matemáticos hacen de la consistencia una condición necesaria para la aceptación de una teoría o un resultado[6].

Por último, tenemos la estrategia de adoptar FBP[7]; es decir, la estrategia de incrementar al máximo posible la ontología matemática, de manera tal que toda teorización matemática consistente proporcione conocimiento de alguna colección de objetos abstractos. Esto nos libera de tener que incorporar a nuestra epistemología disquisiciones ulteriores (quizá controversiales) relativas a nuestras facultades cognitivas o la naturaleza de las entidades matemáticas. De hecho, la pretensión de que la consistencia de una teoría matemática implica la existencia de sus objetos goza de cierto prestigio independiente en la literatura[8]. Pasemos entonces a estudiar en detalle los recursos ontológicos y epistemológicos de FBP, para luego examinar si, efectivamente, proporciona una respuesta satisfactoria al problema de Benacerraf.

La ontología de FBP

Una primera formulación de FBP es:

(3) Todo objeto matemático lógicamente posible existe.

Balaguer rechaza esta formulación por dos razones: primero, el antecedente nos compromete con un dominio de objetos matemáticos meramente posibles; segundo, el consecuente hace de la existencia una propiedad predicable de ciertos objetos y no de otros. Estos compromisos se hacen patentes al formalizar (3) de manera elemental:

(4) $(\forall x)\ [(\text{Matemático}(x)\ \&\ \text{Posible}(x)) \rightarrow \text{Existente}(x)]$

Balaguer quiere desligar a FBP de todos estos compromisos. "No pienso que haya cosas tales como objetos que 'no existen' o que son 'posibles pero no actuales.' Desde mi punto de vista, todos los objetos son objetos ordinarios, actualmente existentes" (Balaguer, 1998, p. 6).

Otra opción que Balaguer considera y rechaza es homologar FBP a la tesis de que:

(5) Toda teoría matemática consistente describe alguna colección de objetos abstractos existentes.

El problema ahora es que (5) requiere explicación y, *prima facie*, la única explicación factible es que el reino matemático es un *plenum*. Así, volvemos al punto de partida: necesitamos esclarecer el contenido de FBP y, para esto, necesitamos un criterio de existencia que comprenda una plétora de entidades matemáticas sin recaer en una metafísica sospechosa[9].

En última instancia, Balaguer considera que la fórmula:

(6) $(\forall Y)\ [\Diamond\ (\exists x)\ (Mx\ \&\ Yx) \rightarrow (\exists x)\ (Mx\ \&\ Yx)]$

refleja de manera tolerablemente clara el contenido de FBP, no sin poner algunos reparos, que veremos en breve.

Analicemos las herramientas formales involucradas en la formulación de (6). 'Y' es una variable de segundo orden (para propiedades puramente matemáticas), '$\Diamond$' es un operador de posibilidad lógica, 'x' es una variable de primer orden y 'Mx' es una fórmula que atribuye la propiedad de ser un objeto matemático. Informalmente: para cualquier propiedad puramente matemática, si es (lógicamente) posible que exista un objeto matemático que tenga esa propiedad, entonces existe un objeto matemático que efectivamente tiene esa propiedad.

En este punto, Balaguer nos hace dos advertencias: (6) no nos compromete seriamente con la existencia de objetos matemáticos; (6) sólo refleja parcialmente el contenido de FBP. Ciertamente, (6) es *vacuamente* verdadero si su antecedente es falso. Pero su antecedente es falso si no hay propiedades matemáticas, o bien las hay pero su instanciación es (lógicamente) imposible. Pero estas alternativas son altamente implausibles: intuitivamente, la existencia de objetos matemáticos (y, en consecuencia, también la instanciación de propiedades puramente matemáticas) *es* lógicamente posible,

[5] Colyvan (2001) reconstruye los presupuestos filosóficos subyacentes en las formulaciones usuales de la tesis de la indispensabilidad y elabora una defensa sistemática de la misma.

[6] Estas objeciones fueron elaboradas en detalle y desde un punto de vista histórico-crítico en mi trabajo: Guirado (2015).

[7] Además de la de Balaguer, la única variante superplatonista consagrada en la literatura es la de Linsky y Zalta (1995). No obstante, voy a ignorar aquí esta complicación y voy a tomar a FBP como teoría representativa de la estrategia de expandir la ontología matemática para responder a la objeción epistemológica contra el platonismo matemático.

[8] Cantor, Hilbert y Poincaré -entre otros- adoptaron esta tesitura. Dauben observa: "La consistencia lógica fue la piedra de toque aplicada por Cantor a cualquier teoría nueva antes de declararla [...] una parte legítima de la matemática" (Dauben, 1990, p. 129). Hilbert escribió en una carta a Frege: "si los axiomas [...] dados no se contradicen con sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen" (Frege, 1980, p. 39-40). Según Poincaré: "Una entidad matemática existe supuesto que no haya contradicción alguna implicada en su definición" (Poincaré, 1905, p. 44).

[9] Restall (2003) reconstruye exhaustivamente las diversas formulaciones plausibles de FBP y concluye que ninguna de ellas es satisfactoria. Beall (1999) le reprocha a FBP el no proporcionar una cobertura ontológica para las teorías matemáticas paraconsistentes.

dado que su postulación no entraña ninguna contradicción lógica o conceptual. De hecho, sería un despropósito insistir en esa acusación, porque la postulación de objetos matemáticos corre originariamente por cuenta de los matemáticos, con lo cual, si la existencia de esos objetos fuera -en algún sentido- imposible, el problema recaería primordialmente en la matemática y no en el platonismo.

Pasemos a la segunda advertencia. Balaguer pone en duda que haya "alguna manera adecuada de formalizar FBP". Desde su perspectiva, "FBP es, ante todo, una filosofía informal de la matemática" (Balaguer, 1998, p. 6). Ciertamente, no es cuestionable adoptar una filosofía informal de la matemática o rehusarse a formalizarla. Pero lo fundamental no pasa por determinar si FBP se presta o no a una formalización exhaustiva; lo fundamental es que envuelve un postulado de existencia modalmente comprometido y ontológicamente inflacionario, con lo cual hay un peligro cierto de que tenga derivaciones contraintuitivas. De modo que, para despejar esta preocupación, cabe exigir que al menos parte de lo que FBP implica acerca del reino platónico sea capturable en el lenguaje lógico. Pues ese lenguaje es la herramienta predilecta para proteger a nuestras teorías filosóficas de diversos factores de degeneramiento elucidatorio generalmente implicados en el habla corriente, como ser las incoherencias conceptuales y las ambigüedades semánticas. No obstante, Balaguer dice adoptar (6) con el sólo propósito de ayudar al lector a comprender el contenido de FBP.

La epistemología de FBP

La estrategia de Balaguer es sencilla: consiste en expandir la ontología platonista a tal punto que la explicación de la confiabilidad epistémica de nuestras teorías matemáticas dependa simplemente de nuestra pericia para adoptar sólo teorías matemáticas consistentes. Así, el acento de la estrategia epistemológica recae ahora en el seguimiento de los criterios metodológicos para la selección racional de teorías y no ya en la confiabilidad independiente de nuestras creencias matemáticas o de los métodos que gobiernan su adquisición.

> *Si todos los objetos matemáticos que podrían lógicamente existir, actualmente existen, como dicta FBP, entonces todas las descripciones matemáticas (consistentes) y todos los términos matemáticos referirán, y cualquier representación (consistente) de un objeto matemático que alguien podría construir será una representación adecuada de un objeto matemático actualmente existente (Balaguer, 1998, p. 43, bastardilla removida).*

Ahora bien, esta jugada es legítima sólo si los seres humanos tenemos la habilidad de constatar (o conjeturar confiablemente) que muchas teorías matemáticas son consistentes sin entrar en contacto con el reino platónico. En otras palabras, Balaguer necesita una noción antiplatonista de consistencia, es decir, una noción de consistencia cuya caracterización no demande compromisos con entidades abstractas. Pero las nociones de consistencia estandarizadas son nociones platónicas. La noción sintáctica de consistencia nos compromete con derivaciones y las derivaciones son conjuntos ordenados de fórmulas-tipo. Decimos que una teoría formal T es sintácticamente consistente si y sólo si T no permite derivar una contradicción. La noción semántica envuelve compromisos con modelos y los modelos son entidades matemáticas. Decimos que una teoría formal T es semánticamente consistente si y sólo si hay al menos un modelo (un dominio conjuntista y una función interpretativa) que satisface sus axiomas. Ahora bien, los partidarios de FBP niegan que podamos entrar en contacto con cosas tales como derivaciones sintácticas o modelos, con lo cual las nociones de consistencia usuales no podrán jugar un papel en la articulación de FBP.

Balaguer incorpora la noción intuitiva de consistencia (o posibilidad lógica) de Hartry Field (1991) para salir del problema (ver Balaguer, 1998, p. 70-72). Esta noción condensa el funcionamiento de un operador sintáctico primitivo que responde a las cláusulas:

(C1) Si una teoría T tiene modelo, entonces T es intuitivamente consistente (o lógicamente posible).
(C2) Si una teoría T es intuitivamente consistente (o lógicamente posible), entonces T es sintácticamente consistente (es decir, no prueba ninguna contradicción).

Que el operador de consistencia de Field es primitivo quiere decir que no se presta a una definición. En rigor, las cláusulas (C1) y (C2) son maneras de dilucidar su extensión. Por ejemplo, en vista de la completitud de la lógica de primer orden, se sigue de la conjunción de (C1) y (C2) que, si T es una teoría de primer orden, entonces T es consistente en sentido platónico si y sólo si T es intuitivamente consistente. La noción de consistencia de Field permite completar la estrategia de Balaguer. En efecto, los FBPistas pueden aducir que la noción de consistencia de los matemáticos *es* la noción intuitiva y primitiva de Field y que, así, la explicación de su habilidad para separar las teorías (puramente) matemáticas consistentes de las inconsistentes no exige atribuirles alguna capacidad de acceso al reino platónico.

FBP y el problema de la confiabilidad epistémica

Balaguer niega que las verdades matemáticas sean verdades lógicas o conceptuales (ver Balaguer, 1998, p. 44 y 74). El motivo es que la negación de un teorema existencial de la matemática (*e.g.*, 'Hay infinitos número primos') no es una contradicción lógica o conceptual. A juicio de Balaguer, la existencia de objetos matemáticos constituye (si acaso) una faceta contingente de la realidad. En esta sección veremos que la mezcla de plenitud y fragilidad modal excluye la posibilidad de satisfacer algunas exigencias de confiabilidad epistémica bastante elementales. En rigor, cualquier epistemología de la matemática respetable debe verificar las siguientes exigencias:

(D) Las creencias matemáticas confiables dependen contrafácticamente de los hechos que les conciernen;
(F) La correspondencia entre creencias y hechos matemáticos no es fortuita.

FBP no verifica ninguna.

Balaguer reconoce expresamente que (D) es inverificable en FBP, pero aduce que el problema surge al "tomar principios epistémicos que parecen aplicables [...] en contextos empíricos y aplicarlos en contextos matemáticos" (Balaguer, 1998, p. 68). Esta réplica pierde de vista que lo que nos concierne es un problema bastante general y abstracto: determinar las condiciones de confiabilidad epistémica de nuestras creencias acerca del mundo (sean creencias empíricas, matemáticas o metafísicas). De hecho, otros defensores del platonismo (*e.g.*, Jerrold Katz y Ed Zalta) le reprocharían a Balaguer el atribuir a los objetos matemáticos una modalidad de existencia privativa de los objetos físicos ordinarios. Las verdades matemáticas gozan de una fortaleza modal de la que no gozan las verdades ordinarias. Por ejemplo, la verdad de '10 > 7' no es susceptible a un cambio de condiciones iniciales -si acaso lo es- en el mismo sentido en que, presumiblemente, lo es la verdad de: 'Messi juega mejor que Ronaldo'. De modo que, si se lograra mostrar que FBP *no* satisface (D) ni (F), deberá concluirse que FBP no garantiza la confiabilidad epistémica de nuestras creencias matemáticas consistentes. Dicho con crudeza: la falsedad de (D) y (F) implica que los matemáticos no tienen una perspectiva de la confiabilidad de sus creencias y que, en consecuencia, no podrán decir que saben que 10 > 7 o que están justificados a creerlo.

Normalmente se pide que la creencia de que *p* dependa contrafácticamente del hecho de que *p* para constituir conocimiento. De modo que, idealmente, de no haber ocurrido que *p*, entonces nadie en sus cabales habría creído que *p*. En rigor, un sujeto X sabe que *p* si y sólo si: (a) la creencia de que *p* es verdadera, (b) X cree efectivamente que *p*, (c) X está justificado a creer que *p* y (d) la creencia de que *p* no es fortuita. Las condiciones (a)-(c) conforman el carozo del cualquier análisis estándar del concepto de conocimiento, mientras que (d) es una cláusula adicional introducida para lidiar con las réplicas de tipo Gettier[10]. Este listado es una manera de desplegar el siguiente criterio de atribución de conocimiento: X tiene conocimiento (matemático) si y sólo si tiene un cierto panorama (más o menos consciente y detallado) de los fundamentos de la confiabilidad de sus métodos de adquisición de creencias (matemáticas) verdaderas. Mi tesis es, precisamente, que FBP no garantiza la existencia de una tal perspectiva y que, como consecuencia de esto, si FBP es verdadero, entonces los matemáticos no tienen conocimiento, porque no están justificados a creer lo que creen.

Empecemos por la inverificabilidad FBPista de (D). Este punto es importante, porque apunta a que los matemáticos no pueden incorporar una evaluación de los hechos que les conciernen al análisis de la justificación de sus creencias. Mi argumento al respecto es el siguiente.

Argumento 1: Según FBP, (A) la existencia del reino platónico es una contingencia del mundo actual. Por otra parte, (B) la existencia o inexistencia de ese reino no tiene ningún efecto en lo mental o lo físico, porque sus entidades carecen de locación espaciotemporal y eficacia causal. De modo que, si, *ceteris paribus*, no hubiese entidades platónicas, entonces la realidad resultante (llamémosla 'M*') sería una réplica del núcleo psicofísico del mundo actual (llamémoslo 'M'). Pero, entonces, cualquier sujeto X que crea en la existencia de números seguirá creyendo (erróneamente) que los hay al pasar de M a M*, porque, por estipulación, M* no contiene más objetos y propiedades instanciadas que las necesarias y suficientes para ser *física y psicológicamente* idéntico a M. Así, se sigue de (A) y (B) que, de no haber números, los seres humanos podríamos seguir creyendo que los hay y que, de hecho, no tendríamos razones fundadas para cambiar de parecer al respecto. Pero esto quiere decir que nuestra creencia de que hay números no depende contrafácticamente de que los haya o no. Así pues, FBP no garantiza que la capacidad de seleccionar a las teorías matemáticas consistentes procure una perspectiva de confiabilidad, es decir, una idea más o menos cabal de los fundamentos de la corrección de nuestras creencias matemáticas (consistentes).

Pasemos a mostrar que la epistemología de FBP va a contramano de (F), es decir, que impone una correspondencia fortuita entre creencias y hechos matemáticos. Mi argumento al respecto es una continuación del anterior.

Argumento 2. Ubiquémonos ahora en M*. Supongamos que un sujeto Y cree allí (erróneamente) que hay números. Ahora bien, si pasamos de M* a M, su creencia pasa a ser verdadera por casualidad, dado que no envuelve un cambio en las creencias de Y ni en el modo en que fueron adquiridas y/o evaluadas. Pero, si Y no puede explicar la confiabilidad del proceso que determinaría que su creencia de que *p* sea verdadera en M y falsa en M*, entonces cabe descartar que Y sepa (en sentido estricto) que *p*. Dicho brevemente: si Y no tiene una perspectiva de la confiabilidad o falta de confiabilidad de sus métodos de adquisición de creencias y de las condiciones necesarias para ser confiables (en caso de que no lo sean), entonces no podrá justificar su creer en lo que cree o su descreer de lo que descree, de modo que, en rigor, sus creencias no ostentarán el estatuto de conocimiento.

[10] No pretendo sugerir que (a)-(d) den marco a un concepto de conocimiento exento de problemas. Me conformo en este trabajo con formular un concepto de conocimiento lo suficientemente claro y exigente como para evaluar si FBP garantiza el cumplimiento de las condiciones de confiabilidad epistémica más elementales.

En suma: la estrategia de Balaguer frente a la objeción de Benacerraf es un *red herring*: FBP garantiza que nuestras creencias matemáticas (consistentes) reflejan hechos del reino platónico, pero el precio es que pierden el estatus de conocimiento.

FBP y la Teoría de Modelos

La Teoría de Modelos (TM) se ocupa de estudiar las interpretaciones de una teoría formal. La delimitación de esas interpretaciones es el recurso típico para evaluar su capacidad expresiva y deductiva. La lógica de primer orden es el principal ámbito de aplicación de TM, por ser la herramienta normal para la regimentación de las inferencias aceptadas por los matemáticos. La interpretación de una teoría formalizada en primer orden involucra una estructura que provee un conjunto que oficia de dominio de valores de las variables cuantificadas y una función que determina la extensión de las letras de predicado y los referentes de las constantes de individuo.

TM juega un papel clave en la elaboración del concepto de verdad de FBP. De hecho, Balaguer equipara la verdad de una teoría matemática (consistente) con la existencia de modelos estándar que satisfacen sus axiomas. "Lo que los matemáticos quieren decir [...] cuando dicen que una oración es verdadera es que es verdadera en el modelo estándar, o en la estructura pretendida" (Balaguer, 1998, p. 60).

La semántica filosófica de FBP es una variante moderada del estructuralismo matemático. Por una parte, impone restricciones puramente relacionales para identificar los objetos de una teoría y delimitar la clase de sus modelos; pero, por otra, admite la existencia de propiedades no-estructurales. En rigor, se exige que los modelos sean estándar (*i.e.*, que tengan dominio isomorfo al dominio pretendido) y que los objetos se condigan de algún modo con las intuiciones de los matemáticos. Pero, en el contexto de FBP, el que las propiedades matemáticamente relevantes sean todas ellas propiedades estructurales no significa que no haya objetos matemáticos, o que los objetos sean ontológicamente secundarios con respecto a las estructuras. En vista de la inmensidad e independencia metafísica del reino platónico, es plausible suponer que hay objetos matemáticos que comparten todas sus propiedades estructurales y que difieren en aspectos que tal vez nunca llegaremos a concebir. Esto le permite a Balaguer conservar una metafísica clásica de objetos sin sucumbir al problema metafísico de Benacerraf (1982), es decir, al problema de postular entidades matemáticas particulares cuando las teorías (puramente) matemáticas sólo imponen restricciones estructurales a los ítems que satisfacen sus axiomas. En rigor, FBP permite que una teoría matemática sea satisfecha por diversas colecciones de objetos sin restar importancia a los hechos estructurales capturados por sus modelos.

> *Simplemente no importa si nuestras teorías matemáticas no logran seleccionar colecciones únicas de objetos (o si nuestros términos matemáticos singulares no logran seleccionar referentes únicos), porque podemos capturar los hechos estructurales tras los cuales estamos sin seleccionar colecciones únicas de objetos (o referentes únicos) (Balaguer, 1998, p. 86).*

Veamos un ejemplo. La oración '3 es primo' es verdadera en el contexto de FBP si y sólo si "(a) hay al menos un modelo estándar de la aritmética y (b) '3 es primo' es verdadero en todos los modelos estándar de la aritmética" (Balaguer, 1998, p. 89-90). Ahora bien, dado que es plausible suponer que hay muchas omega-secuencias (y que éstas difieren en aspectos que quizá nunca concibamos), es plausible suponer que hay muchos modelos estándar de la aritmética. '3' refiere a todos los objetos que ocupen el lugar adecuado en el dominio de esos modelos, es decir, a todos los objetos que satisfagan los requerimientos estructurales para constituir el cuarto elemento de una secuencia con elemento inicial, sin cota superior y ordenada por la relación de sucesión.

Ahora bien, la noción de un modelo estándar es una noción matemática, con lo cual su uso nos expone a la objeción de Benacerraf. Un modelo aritmético es estándar si y sólo si tiene dominio isomorfo al conjunto de los números naturales y satisface los axiomas de Peano. Así, el conocimiento de entidades matemáticas como conjuntos, isomorfismos y funciones interpretativas es condición para desplegar el concepto de estandaridad (modelo-teórica) y, por esta vía, dar rienda suelta al concepto FBPista de verdad. Pero se supone que FBP es la única teoría capaz de explicar el conocimiento matemático, con lo cual sería un despropósito presuponer los conocimientos necesarios para desarrollar el concepto de un modelo estándar y, por esta vía, desplegar la ontología y -ulteriormente- la epistemología FBP. Éste es, precisamente, el meollo de la preocupación de Benacerraf: los platonistas no pueden presuponer ningún conocimiento matemático para elaborar su punto de vista, porque su misión primordial es demostrar que su propuesta no excluye la posibilidad de explicar el conocimiento matemático en general.

Otro problema en este contexto es que FBP es incompatible con TM. Tomemos una teoría (puramente) matemática de primer orden T. Si T es consistente, entonces hay una multiplicidad de modelos isomorfos que satisfacen sus axiomas. Pero algunas teorías (puramente) matemáticas no tienen modelo pretendido o intuitivo. Una de ellas es la teoría axiomática de conjuntos (TC). TM aprovecha los recursos de (una) TC para asignar significado a las fórmulas de las teorías formalizadas en primer orden. Cada interpretación selecciona una clase D (dominio de interpretación) que reúne a todas las entidades consideradas en la interpretación pretendida. La existencia de D es postulada en la semántica modelo-teórica de la metateoría del lenguaje de primer orden en el que la teoría es formalizada. En el caso de TC, D es el conjunto de todos los conjuntos. Pero, para evitar paradojas, TC niega la existencia de esta entidad. Por lo tanto, ninguna TM respetable podrá postular la entidad sindicada como dominio pretendido de TC. Por lo tanto, TC *no* tiene modelo pretendido o intuitivo, como exige FBP[11]. Otro ejemplo: el segundo teorema de Gödel implica que $T + \{\neg G_T\}$ es una teoría matemática consistente sin modelo, donde T es la aritmética elemental formalizada en un sistema de segundo orden con semántica plena y G_T es la oración de Gödel para T (la oración que afirma que el número de Gödel G no codifica una derivación de un teorema de T).

Balaguer es consciente de que algunas teorías matemáticas no tienen modelo (intuitivo). No obstante, considera que esta circunstancia responde a "dificultades técnicas" de TM más que a un exceso de ontología achacable a FBP (ver Balaguer, 1998, p. 192-193, nota 31). Pero esta réplica es completamente *ad hoc*, porque la crítica a TM queda cifrada en su inoperancia para garantizar la satisfacibilidad intuitiva de todas las teorías matemáticas consistentes y esta exigencia está exclusivamente ligada al desarrollo de la teoría de la verdad de FBP.

En segundo lugar, TM, a diferencia de FBP, goza de un grado apreciable de seguridad epistemológica y metodológica independiente. Viene usualmente desplegada con las herramientas expresivas provistas por la teoría matemática mejor establecida (la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel) y su principal ámbito de aplicación es un sistema logístico (el de la lógica de primer orden elemental) con pruebas de consistencia y compleción. Por contraposición, FBP es una teoría informal propuesta con el afán de resolver un problema fundamentalmente filosófico (el problema de la inaccesibilidad de los objetos matemáticos). Por lo tanto, de haber un conflicto entre TM y FBP, habrá que concluir que el problema recae en la segunda y no en la primera.

En tercer lugar, la tensión entre TM (como teoría general de la interpretación) y TC (como proveedora de los recursos ontológicos para llevar a cabo las interpretaciones) pone en jaque el presunto naturalismo pragmático de FBP. Según Balaguer, una de las ventajas de FBP es que "reconcilia la objetividad de la matemática con la extrema libertad que tienen los matemáticos" (Balaguer, 1998, p. 69). Pero la plenitud ontológica que exige FBP es incompatible con las restricciones que impone TC a TM. En rigor, FBP nos compromete con una plenitud de objetos que ninguna teoría matemática consistente puede postular. La pretensión es que esa plenitud incluya colecciones de objetos que satisfagan intuitivamente los axiomas de cualquier teoría matemática consistente. Pero el requisito de consistencia impuesto a TC (la teoría que provee los recursos ontológicos de TM) excluye la existencia de ciertas colecciones de objetos que serían candidatas intuitivas para modelar algunas teorías matemáticas consistentes. Quizá podría pensarse que, si nos restringimos a las teorías de primer orden, FBP es compatible con TM, dado que el teorema de Henkin implica que toda teoría de primer orden sintácticamente consistente tiene modelo. Pero Balaguer rechaza esta posibilidad, en vista de que "el teorema de Henkin provee modelos muy antinaturales", mientras que FBP implica que "todas las teorías puramente matemáticas consistentes describen con verdad partes del reino matemático con las que se corresponden de un modo muy natural, esto es, [...] intuitivamente" (Balaguer, 1998, p. 190, nota 10; bastardilla removida).

En resumen, hay dos factores que marcan la tensión entre TM y FBP: (i) TM descarta que algunas teorías matemáticas (presumiblemente) consistentes tengan modelo (intuitivo); (ii) algunos desarrollos modelo-teóricos (*e.g.*, el teorema de Henkin) implican que algunas teorías matemáticas (las de primer orden consistentes) tienen modelos no-intuitivos. (i) señala un distanciamiento entre la noción (primitiva) de consistencia intuitiva que necesita Balaguer y la noción semántica (modelo-teórica) de consistencia que usan los matemáticos; mientras que (i) y (ii) señalan que la teoría informal de modelos que sugiere FBP va a contramano de la teorización modelística de los lógicos. Así, Balaguer se expone a la acusación de criticar la teoría y la práctica matemática y lógico-matemática (la teoría de modelos y la práctica modelo-teórica normales) para hacer lugar a sus pretensiones filosóficas (la pretensión de que toda teoría matemática consistente tenga un modelo intuitivo en el cielo platónico comprendido por FBP). Esto marca una flagrante incoherencia en la propuesta de Balaguer, porque una de las exigencias que impone a la filosofía de la matemática es que no se entrometa en asuntos de competencia matemática: según él, "el punto de la filosofía de la matemática es interpretar la práctica matemática, no imponerle restricciones sustentadas metafísicamente" (Balaguer, 1998, p. 63). Pero, claramente, FBP impone tal tipo de restricciones. Por ejemplo, al sindicar como deficiencia de TM la falta de modelos para teorías intuitivamente consistentes, y al promover su reemplazo por una teoría informal de modelos matemáticamente implausible.

La implausibilidad metafísica de FBP

En la sección precedente vimos que FBP es incompatible con la teoría y la práctica matemática, básicamente, porque es incompatible con la teoría y la práctica ligadas a la interpretación de los lenguajes formales. En esta sección sostengo que FBP es independientemente implausible, porque va a contramano de nuestras intuiciones metafísico-modales más elementales.

Recordemos para empezar que la formalización (parcial) que propone Balaguer es:

(6) $(\forall Y)\ [\Diamond\ (\exists x)\ (Mx\ \&\ Yx) \rightarrow (\exists x)\ (Mx\ \&\ Yx)]$

[11] Raúl Orayen (2003) fue el primero en elaborar expresamente la tensión existente entre TC y TM cuando la segunda se usa para interpretar las formalizaciones habituales de la primera. Lo paradójico es que, a tal efecto, TM exige a TC postular en un marco formalmente riguroso una entidad cuya existencia viene expresamente descartada en vista del requisito de consistencia.

Mi tesis es que (6) es inaceptable, dado que implica que:

(i) sólo hay objetos matemáticos en los mundos posibles donde FBP es verdadero, de manera que la postulación de objetos matemáticos es incompatible con la tesis de que la posibilidad no es condición suficiente para su existencia;
(ii) un objeto como π es un objeto no-matemático en los mundos posibles donde FBP es falso. La postulación de cosas como π y la tesis de que la posibilidad no es condición suficiente para su existencia son compatibles entre sí, pero al precio de que π no sea un objeto matemático.

Empecemos por demostrar (i). Sea $M^{\#}$ un mundo alternativo al actual donde FBP es falso pero hay algún objeto matemático. Formalmente, nuestros supuestos son:

(S1) $(\exists x)\, Mx$;

(S2) $(\forall F) \sim [\Diamond\, (\exists x)\, (Mx \,\&\, Fx) \rightarrow (\exists x)\, (Mx \,\&\, Fx)]$.

Dado el predicado puramente matemático '$x = \pi$', la siguiente es una instancia de (S2):

(S3) $\sim [\Diamond\, (\exists x)\, (Mx \,\&\, x = \pi) \rightarrow (\exists x)\, (Mx \,\&\, x = \pi)]$.

Puesto que $(\exists x)\, (Fx \,\&\, Gx) \rightarrow ((\exists x)\, Fx \,\&\, (\exists x)\, Gx))$ es una verdad lógica, de (S3) se desprende lógicamente:

(S4) $\sim [(\Diamond\, (\exists x)\, Mx \,\&\, \Diamond\, (\exists x)\, x = \pi) \rightarrow ((\exists x)\, Mx \,\&\, (\exists x)\, x = \pi)]$,

que es lógicamente equivalente a:

(S5) $(\Diamond\, (\exists x)\, Mx \,\&\, \Diamond\, (\exists x)\, x = \pi) \,\&\, \sim ((\exists x)\, Mx \,\&\, (\exists x)\, x = \pi)$.

Permutando el segundo conyunto de (S5) por su equivalente disyuntivo, obtenemos:

(S6) $(\Diamond\, (\exists x)\, Mx \,\&\, \Diamond\, (\exists x)\, x = \pi) \,\&\, (\sim (\exists x)\, Mx \vee \sim (\exists x)\, x = \pi)$.

Apelando a la regla de simplificación para la conjunción, quedémonos con el segundo conyunto de (S6):

(S7) $\sim (\exists x)\, Mx \vee \sim (\exists x)\, x = \pi$.

Por silogismo disyuntivo a partir de (S1) y (S7), obtenemos:

(S8) $\sim (\exists x)\, x = \pi$.

Ahora bien, dado que π es un objeto matemático cualquiera, podemos generalizar (S8):

(S9) $(\forall y)\, (My \rightarrow \sim (\exists x)\, x = y)$.

Por contraposición, se sigue de (S9):

(S10) $(\forall y)\, ((\exists x)\, x = y \rightarrow \sim My)$

Pero, por la clásica definición de existencia en primer orden, se sigue de (S10):

(S11) $\sim (\exists x)\, Mx$,

lo cual entra en contradicción con (S1).

Pasemos a (ii). Sea $M^{\$}$ un mundo donde FBP es falso pero existe π. Formalmente, nuestros supuestos son:

(T1) $(\exists x)\, x = \pi$;

(T2) $(\forall F) \sim [\Diamond\, (\exists x)\, (Mx \,\&\, Fx) \rightarrow (\exists x)\, (Mx \,\&\, Fx)]$.

Dado el predicado puramente matemático '$x = \pi$', por instanciación de (T2) se obtiene:

(T3) $\sim [\Diamond\, (\exists x)\, (Mx \,\&\, x = \pi) \rightarrow (\exists x)\, (Mx \,\&\, x = \pi)]$.

Repitiendo *-mutatis mutandis-* los pasos (S4)-(S6) de la derivación anterior, se obtiene:

(T7) $\sim (\exists x)\, Mx \vee \sim (\exists x)\, x = \pi$.

Por silogismo disyuntivo a partir de (T1) y (T7), obtenemos:

(T8) $\sim (\exists x)\, Mx$.

Pero, por la clásica definición de existencia en primer orden, se sigue de (T8):

(T9) $(\forall y)\, (My \rightarrow \sim (\exists x)\, x = y)$.

Por contraposición, se sigue de (T9):

(T10) $(\forall y)\, ((\exists x)\, x = y \rightarrow \sim My)$

Por instanciación de (T10), se sigue:

(T11) $(\exists x)\, x = \pi \rightarrow \sim M\pi)$.

Por *modus ponens* a partir de (T1) y (T11), obtenemos:

(T12) $\sim M\pi$

Los razonamientos precedentes son una demostración de que, si FBP es (contingentemente) verdadero, entonces todo mundo (posible) donde FBP sea falso es un mundo donde, o bien no hay objetos matemáticos como π (como pasa en $M^{\#}$), o bien los hay pero pierden la propiedad de ser objetos matemáticos (como pasa en $M^{\$}$). Así, FBP "secuestra" el espacio lógico de la realidad matemática, en el sentido de que hay objetos matemáticos genuinos sólo allí donde la posibilidad es condición suficiente para la existencia. Esto es fuertemente contraintuitivo. Ciertamente, es tolerable adjudicar a los objetos matemáticos el estatuto de entidades (lógicamente) contingentes. Pero no es tolerable que su existencia y naturaleza quede supeditada a la cantidad de objetos existentes. A juzgar por nuestras intuiciones, la realidad podría estar constituida exclusivamente por objetos físicos y unas pocas categorías de objetos matemáticos; pongamos por caso, conjuntos o clases. De hecho, esa es la realidad que proyectaba Quine como ideal de nuestro mejor sistema de mundo. En conclusión, la contingencia y la plenitud no pueden venir conjuntamente presupuestas en una teoría de objetos matemáticos.

Conclusiones

Vimos en este trabajo que la expansión de la ontología platonista no resuelve el problema de Benacerraf. En rigor, vimos que la combinación de contingencia y plenitud no permite cubrir algunos factores elementales de confiabilidad epistémica. Pero, además, esa combinación es metafísica y metodológicamente perversa: si FBP es verdadero, entonces cualquier falla de plenitud implica que no hay objetos (genuinamente) matemáticos. Y, como frutilla del postre, FBP exige la validación de una teoría de modelos intuitiva que sólo puede comprar sus recursos ontológicos al precio de la inconsistencia. Estos desajustes deben llamarnos la atención (una vez más) sobre dos cuestiones: primero, los peligros que acarrea el expansionismo metafísico cuando no pasa por el tamiz de la formalización lógico-semántica; segundo: la cuestión de la modalidad de los objetos matemáticos permanece irresuelta. Balaguer nos da buenos motivos para descartar que la existencia del reino matemático sea un asunto de necesidad lógica o conceptual[12]. Pero, por otra parte, la contingencia no puede convivir con la plenitud. Con todo, la plenitud es intuitiva e independientemente plausible (siempre y cuando evitemos adosarle una ontología de modelos). De hecho, más allá de los desatinos de FBP, la plenitud parece ser una condición necesaria para rebatir el argumento de Benacerraf. La tarea pendiente de los superplatonistas es, precisamente, dar un marco metafísico-modalmente coherente y epistemológicamente satisfactorio a su irreprochable búsqueda de plenitud.

Referencias

BALAGUER, M. 1998. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. New York, Oxford University Press, 217 p.

BEALL, J.C. 1999. From Full Blooded Platonism to Really Full Blooded Platonism. *Philosophia Mathematica*, **7**(3):321-325. http://dx.doi.org/10.1093/philmat/7.3.322

BENACERRAF, P. 1982. What Numbers Could Not Be. *In:* P. BENACERRAF; H. PUTNAM (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge, Cambridge University Press, p. 272-294.

BENACERRAF, P. 1973. Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy*, **70**(19):661-679. http://dx.doi.org/10.2307/2025075

COLYVAN, M. 2001. *The Indispensability of Mathematics*. New York, Oxford University Press, 172 p.

DAUBEN, J.W. 1990. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, Princeton University Press, 404 p.

FIELD, H. 1991. Metalogic and Modality. *Philosophical Studies*, **62**(1):1-22. http://dx.doi.org/10.1007/BF00646253

FREGE, G. 1980. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Chicago, University of Chicago Press, 214 p.

GÖDEL, K. 1947. What is Cantor's Continuum Problem? *In:* P. BENACERRAF; H. PUTNAM (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge, Cambridge University Press, p. 470-485. http://dx.doi.org/10.2307/2304666

GUIRADO, M. 2015. Realismo científico y antiplatonismo. *Revista Zétesis*, **1**(1):9-20.

HALE, R.; WRIGHT, C. 1992. Nominalism and the Contingency of Abstract Objects. *Journal of Philosophy*, **89**(3):111-135. http://dx.doi.org/10.2307/2026789

HUNTER, G. 1994. Platonist Manifesto. *Philosophy*, **69**(268):151-162. http://dx.doi.org/10.1017/S0031819100046817

KATZ, J. 1998. *Realistic Rationalism*. Cambridge, MIT Press, 226 p.

LINSKY, B.; ZALTA, E. 1995. Naturalized Platonism vs. Platonized Naturalism. *The Journal of Philosophy*, **92**(10):525-555. http://dx.doi.org/10.2307/2940786

MADDY, P. 1990. *Realism in Mathematics*. Oxford, Oxford University Press, 204 p.

ORAYEN, R. 2003. Una paradoja en la semántica de la teoría de conjuntos. *In:* A. MORETTI; G. HURTADO (comps.), *La Paradoja de Orayen*. Buenos Aires, EUDEBA, p. 35-59.

POINCARÉ, H. 1905. *The Foundations of Science*. London, Walter Scott Publishing, Thomas Nelson and Sons, 244 p.

RESNIK, M. 1997. *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford, Oxford University Press, 285 p.

RESTALL, G. 2003. Just what is Full-blooded Platonism? *Philosophia Mathematica*, **11**(1):82-91. http://dx.doi.org/10.1093/philmat/11.1.82

TARSKI, A. 1983. The Concept of Truth in Formalized Languages. *In:* J.H. WOODGER (ed.), *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*. Indianapolis, Hackett Publishing, p. 152-278.

Submitted on December 4, 2015

Accepted on June 21, 2016

[12] Hale y Wright (1992) ofrecen los argumentos más elaborados en favor de la necesidad conceptual de los objetos matemáticos. Estos argumentos fueron refutados por Field (1993).