

A Educação Matemática Realística de Hans Freudenthal como uma proposta de subversão aos resquícios do Movimento da Matemática Moderna no Brasil

Realistic Mathematics Education of Hans Freudenthal as a subversion proposal to the leftovers from Modern Mathematics Movement in Brazil

Gabriel dos Santos e Silva¹
Instituto Federal do Paraná
gabriel.santos22@gmail.com

Mariana Souza Innocenti²
Universidade Estadual de Londrina
mariinnocenti@gmail.com

Vanessa Kishi Sampel³
Universidade Estadual de Londrina
vanessakishis@gmail.com

Resumo: No presente artigo, pretende-se discutir as críticas de Hans Freudenthal ao Movimento da Matemática Moderna e apresentar os principais elementos apontados pelo autor (e por outros membros do Instituto Freudenthal) para subverter as práticas estruturalistas do ensino de matemática. Este movimento surgiu no final da década de 1950 sob influência de grupos de estudo que discutiam currículo no ensino de matemática, com foco em mudanças apenas nos conteúdos e sem preocupações com algumas questões didáticas. A pesquisa tem como fonte principal os artigos e livros publicados por Hans Freudenthal em língua inglesa, disponíveis a partir de diferentes inventários feitos. Optou-se por trabalhar com a revisão de literatura sistemática, com um corpus constituído por

¹ Instituto Federal do Paraná, Capanema, Paraná, Brasil.

² Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil.

³ Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil.

textos de Hans Freudenthal. Foi possível observar que as críticas de Freudenthal ao Movimento da Matemática Moderna se dão em como o movimento foi implementado e às premissas (matemáticas e didáticas) assumidas pelos adeptos do movimento.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística; Movimento da Matemática Moderna; Currículo.

Abstract: In this article, we intend to discuss Hans Freudenthal's criticisms of the Modern Mathematics Movement and present the main elements pointed out by the author (and by other members of the Freudenthal Institute) to subvert the structuralist practices of mathematics teaching. This movement emerged in the late 1950s under the influence of study groups that discussed curriculum in mathematics teaching, with a focus on changes only in content and without concern for some didactic issues. The main source of the research is the articles and books published by Hans Freudenthal in English, available from different inventories made. We chose to work with systematic literature review, with a corpus constituted by Hans Freudenthal's texts. It was possible to observe that Freudenthal's criticisms of the Modern Mathematics Movement are based on how the movement was implemented and on the (mathematical and didactical) premises assumed by the followers of the movement.

Keywords: Realistic Mathematics Education; Modern Mathematics Movement; Curriculum.

Introdução

Um dos grandes marcos no ensino de matemática é o Movimento da Matemática Moderna (MMM), que impactou as ações dos professores, os livros didáticos e o ensino de matemática em diversos países do mundo. Dentre as principais mudanças curriculares propostas por este movimento, destacam-se o ensino de estruturas matemáticas desde as primeiras séries de escolarização, o abandono da chamada “matemática tradicional” e o uso excessivo de simbolismo e linguagem abstrata. Depois de sua implementação em diversos países, inclusive no Brasil, o movimento começou a sofrer críticas e fracassar.

Nos Países Baixos, o matemático alemão Hans Freudenthal (1905-1990) preconizou uma abordagem de ensino denominada Educação Matemática Realística (RME⁴), cuja missão principal era combater as ideias defendidas pelo Movimento da Matemática Moderna. Sua concepção de matemática, bem como suas propostas para a criação de um ambiente escolar profícuo à aprendizagem matemática, se tornaram base para uma reforma curricular nos Países Baixos, vigente até os dias atuais.

⁴ Sigla para a expressão *Realistic Mathematics Education* em língua inglesa.

Instalou-se, então, na Universidade de Utrecht, o Instituto Freudenthal, em que pesquisadores investigam o ensino de ciências e de matemática e continuam o legado de Hans Freudenthal como uma forma de subversão e oposição ao Movimento da Matemática Moderna.

No Brasil, o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA⁵) investiga a Educação Matemática Realística como aporte teórico para a condução de aulas de Matemática na Educação Básica e no Ensino Superior e como subsídio para discussões a respeito da avaliação da aprendizagem escolar. As investigações deste grupo de pesquisa têm apontado que a abordagem realística é uma alternativa ao ensino tradicional e às práticas de avaliação que visam apenas a seleção, classificação e o rendimento.

Nesse sentido, a Educação Matemática Realística mostra-se como uma abordagem com princípios voltados ao rompimento de resquícios do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Pretende-se, então, estudar as críticas de Hans Freudenthal a esse movimento e buscar os principais elementos apontados pelo autor (e por outros membros do Instituto Freudenthal) para subverter as práticas estruturalistas do ensino de matemática.

Desse modo, o objetivo deste artigo é analisar e discutir excertos de textos de Hans Freudenthal (disponíveis em língua inglesa) acerca do Movimento da Matemática Moderna. Assume-se que essa discussão é pertinente, pois o Movimento da Matemática Moderna chegou ao Brasil, modificando o currículo de matemática e as práticas pedagógicas, e nos dias atuais ainda é possível reconhecer resquícios desse movimento na cultura escolar.

Movimento da Matemática Moderna

De acordo com Kline (1976), era consenso entre professores estadunidenses, no início da década de 1950, que o ensino de matemática havia fracassado. A maior parte dos estudantes tinha aversão ao conhecimento matemático trabalhado nas escolas. Quando os Estados Unidos entraram na Segunda Guerra Mundial, em 1941, se depararam com a realidade de que não sabiam matemática e, assim, instituíram cursos especiais para tentar superar esta situação. Kline (1976, p. 32) afirma que “os grupos que empreenderam a reforma concentraram-se no currículo e explicaram que, se se melhorasse este componente, o ensino de matemática seria coroado com êxito”.

Então, durante a década de 1950, iniciaram-se debates a respeito do currículo e do ensino de matemática nos Estados Unidos e na Europa. O principal órgão responsável pela elaboração de recomendações de projetos de inovação era o *National Committee on Mathematical Requirements*. Outro órgão que fazia parte dos debates, principalmente por meio de publicações e congressos anuais, era o *National Council of Teachers of America* (NCTM) (BÜRIGO, 1989).

No ano de 1950, a *Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques* (CIEAEM), comissão que se propunha a “coordenar o trabalho psicológico, metodológico e

⁵ Mais informações em <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>.

prático, no sentido de melhorar o ensino de matemática, por diferentes profissionais em diferentes países”, iniciou uma série de encontros para debate sobre a modernização do ensino de matemática (BÜRIGO, 1989, p. 71) . Dois anos depois, em 1952, “a Comissão de Matemática Escolar da Universidade de Illinois, presidida pelo professor Max Beberman, começou a preparar um novo, ou moderno, currículo de matemática” (KLINE, 1976, p. 33). Em 1954, a

Union Mathématique Internationale (UMI), em Assembléia Geral, decidiu pela reorganização de sua *Comission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM), criada em 1908 [...]. A principal atividade da CIEM era a organização de simpósios para a discussão de temas considerados significativos para o ensino de matemática. Contava também com um órgão de publicação regular – a revista “L’Enseignement Mathématique” (BÜRIGO, 1989, p. 72).

O CIEM, que teve suas atividades interrompidas durante os períodos das guerras mundiais, também tinha intenção de “agregar outros países ao movimento de reformas”. Decidiu-se que convidariam países, mas sem direito a voto, como no caso do Brasil.

Em 1955, nos Estados Unidos, a Junta Examinadora de Admissão ao Colégio, que tinha a função de preparar exames para admissão em colégios, decidiu compor um currículo de matemática que julgava apropriado (KLINE, 1976). No mesmo ano, foi publicado o primeiro livro do CIEAEM, com textos do epistemólogo Jean Piaget, dos matemáticos Dieudonné, Choquet e Lichnerowicz, do lógico Beth e do pedagogo Caleb Gattegno. O livro foi divulgado no Brasil em 1957, no II Congresso Nacional de Ensino de Matemática (BÜRIGO, 1989).

Em 1957, os russos lançaram o Sputnik I, primeiro satélite na órbita da Terra, período marcado pela Guerra Fria⁶. Segundo Kline (1976), este acontecimento fez com que os estadunidenses acreditassem que estavam mais atrasados do que os russos em matemática e ciência. Isso resultou em um investimento maior em pesquisa e inovação por parte do governo estadunidense.

Kline (1976) afirma que, em 1958, a *American Mathematical Society* decidiu criar um currículo de escola secundária e estabeleceu um grupo de Estudos de Matemática Escolar na universidade de Yale e, em 1959, o Conselho Nacional de Professores de Matemática criou sua própria comissão de currículo, denominada Comissão do Currículo da Escola Secundária, que publicou suas recomendações em um artigo em maio de 1959 no periódico *The Mathematics Teacher*. Muitos outros grupos se formaram nessa época. No mesmo período, professores de escola secundária e colégios começaram a escrever livros dentro das bases recomendadas pelos grupos de currículos. Segundo Kline (1976, p. 34), “os inúmeros grupos e autores independentes de compêndios dirigiam-se todos mais ou menos para a mesma direção”. Esses autores foram descritos pelo termo “matemáticos modernos” (KLINE, 1976).

⁶ Confronto entre as superpotências Estados Unidos e União das Repúblicas Socialistas Soviéticas que se instalou no mundo após a Segunda Guerra Mundial.

Enquanto o currículo da “nova matemática” era formado pelos grupos já mencionados, surgiram novos grupos com propostas mais radicais (KLINE, 1976). Em 1959, na França, houve a conferência de Royaumont, cujo foco era repensar o ensino de matemática na escola secundária, com a participação de países da Europa e da América do Norte⁷. As principais conclusões apresentadas após a conferência de Royaumont foram:

1. Não é necessário um programa de álgebra à parte dos de aritmética, de geometria, de trigonometria e de análise, mas um programa que combine os conteúdos destes, dando unidade à matemática. Os conceitos fundamentais são os de conjunto, relação, função e operações; as estruturas fundamentais são as de grupo, anel, corpo e espaço vetorial.
2. O simbolismo moderno para conjuntos, relações e aplicações deve ser adotado tão logo quanto possível, e ser aplicado de um modo coerente e contínuo.
3. Deve dar-se maior importância ao emprego de representações gráficas e seus novos tipos.
4. Grande parte da álgebra tradicional, de pouca ou nenhuma aplicação no estudo posterior de matemática, deve ser eliminada. [...]
5. A geometria euclidiana tradicional ou sintética deve ser modificada em grande parte - e também eliminada - em detrimento de outros métodos de estudo do espaço. Nas escolas secundárias, deve ser ensinada a geometria vetorial condizente aos espaços vetoriais, assim como a álgebra linear.
6. Deve-se eliminar o curso isolado de trigonometria, e seu conteúdo deve ser incorporado aos programas de álgebra, de geometria e de análise. Oferecida desta maneira, passa a ser uma parte da matemática unificada.
7. A análise, o estudo das desigualdades, limites, diferenciação, integração e funções, devem fazer parte da matemática da escola secundária. A maneira de abordar este estudo não tem porque ser rigorosa ao extremo, pode fazer-se uma abordagem intuitiva e correta. A ênfase deve estar nas técnicas de cálculo, apoiadas na compreensão da teoria que se baseiam.
8. A probabilidade e a inferência estatística, juntamente com a análise combinatória do ponto de vista dos conjuntos, funções de conjuntos e espaços amostrais constituem um novo campo muito apropriado para ser tratado na escola secundária.
9. É preciso contar com um grupo de especialistas composto de pessoas de diferentes países para encomendar a elaboração de programas detalhados de ensino de matemática para as escolas secundárias (FEHR; CAMP; KELLOG, 1971, p. 9-10, tradução nossa).

⁷ Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, França, Alemanha, Grécia, Irlanda, Itália, Luxemburgo, Países Baixos, Noruega, Suécia, Suíça, Turquia, Reino Unido, Estados Unidos e Iugoslávia (SOARES, 2001).

Concomitantemente a essas reformas curriculares, um grupo de matemáticos, em sua maioria franceses - como Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil - passou a escrever textos sobre matemática a partir de “leis básicas da álgebra” (comutativa, associativa, distributiva e outras) que constituem as diversas estruturas algébricas (EVES, 2011). Esse grupo utilizava “Nicolas Bourbaki” como pseudônimo e, posteriormente, passou a ser conhecido como “grupo Bourbaki”.

Entre as principais intenções do grupo Bourbaki, estava a de sistematizar a matemática por meio do método axiomático, a partir de estruturas algébricas, estruturas de ordem e estruturas topológicas. Para esse grupo, a matemática era uma única e só existia/existiria por meio do método axiomático (SOARES, 2001). Segundo Silva (2018, p. 20),

sob influência do grupo Bourbaki e de outros grupos estadunidenses que discutiam o currículo com ênfase na “matemática moderna”, surge o “Movimento da Matemática Moderna”, uma abordagem “estruturalista” que considera a matemática como centrada em estruturas básicas, dando ênfase ao estudo da matemática por si, sem uma preocupação com aplicações.

Na conferência de Royaumont, Dieudonné, do grupo Bourbaki, expressou sua opinião contrária à geometria de Euclides:

Dieudonné resumiu suas opiniões nas palavras “Fora Euclides”⁸, [...] deve-se acrescentar que ele não rejeitava a axiomática euclidiana, mas o conteúdo da geometria plana, [...] e mesmo cônicas, considerando essas ideias irrelevantes para o trabalho moderno em matemática. No lugar da geometria ele colocaria matrizes e determinantes (de ordem 2 e 3), Cálculo elementar, gráficos, números complexos e coordenadas polares (GOODSTEIN, 1962, p. 69, tradução nossa).

Entre as mudanças no ensino de matemática no MMM, destacam-se a ênfase dada aos assuntos relativos à lógica, à topologia, aos conjuntos, aos conjuntos numéricos, às relações e funções (BÜRIGO, 1989), o enfoque nas propriedades das operações, o abandono de tópicos da Geometria Euclidiana (SOARES, 2001), entre outros. Além disso, Soares (2001, p. 48) afirma que “o que era posto em prática pelos livros didáticos era a ênfase excessiva em uma linguagem precisa e rigorosa e na justificação de cada passo dado na resolução do problema”.

O Movimento da Matemática Moderna foi introduzido com intensidade nos currículos escolares ao redor do mundo nas décadas de 1960 e 1970, em vários países (BÜRIGO, 1989), chegando ao Brasil em um período marcado pela ditadura civil-militar, que se instalou no país a partir da segunda metade da década de 1960. O grupo que possibilitou uma ampla divulgação da nova proposta, denominado Grupo de Estudos do

⁸ *Euclid must go.*

Ensino da Matemática (GEEM), criado no dia 31 de outubro de 1961, era liderado pelo professor Osvaldo Sangiorgi. Em 1960, o professor Osvaldo Sangiorgi, e outros professores da América Latina, foram convidados a participar de um seminário de verão na Universidade de Kansas. Foi quando tiveram contato com as ideias modernizadoras propostas pelos estadunidenses. A participação dos professores latino-americanos nos cursos era subsidiada pela *National Science Foundation* e pela Organização dos Estados Americanos (OEA) (D'AMBROSIO, 1987).

Vale ressaltar que a mídia também teve um papel importante na divulgação das ideias do MMM no Brasil. De acordo com Nakashima (2007, p. 143),

o apoio da mídia impressa atuou como força propulsora do MMM, incentivando, divulgando e principalmente levando ao conhecimento do leitor as mudanças que estavam ocorrendo nos métodos de ensino da Matemática Moderna, liderado pelo GEEM [...]. A mídia, então, funcionou como agente de convencimento para aceitação das transformações que iria sofrer a matemática escolar [...].

Em 1961, Sangiorgi voltou para o Brasil e organizou um curso de aperfeiçoamento para professores a respeito de Matemática Moderna em uma parceria entre a Secretaria de Educação, o Instituto Mackenzie, onde o curso foi realizado, e a *National Science Foundation*, o que possibilitou a vinda de professores estrangeiros ao Brasil (BÜRIGO, 1989). No ano seguinte, em 1962, o GEEM publicou um artigo propondo um currículo mínimo para o desenvolvimento do novo programa de matemática para a escola secundária (BÜRIGO, 1989). D'Ambrosio (1987, p. 89) afirma que o

programa proposto foi o primeiro a incorporar matemática moderna no currículo [...]. Para o nível secundário, a sugestão foi que os tópicos fossem abordados por meio da linguagem da teoria dos conjuntos e das estruturas algébricas. Foi dada ênfase nos estudos das propriedades das operações, e um estudo de diferentes sistemas numéricos foi recomendado, bem como o estudo das funções.

O primeiro curso para professores do ensino primário foi oferecido em 1964, sendo que “os principais nomes associados à reforma matemática no ensino primário são Lucília Bechara, Manhucia Libermann e Anna Franchi. Essas três mulheres, mais tarde, escreveram um livro didático para o ensino de matemática no nível primário” (D'AMBROSIO, 1987, p. 103).

Durante os anos de 1964 a 1968 os acordos MEC-USAID⁹ que proviam assistência técnica e financeira aos órgãos educacionais brasileiros, instituições e autoridades, assumiram, no nível secundário, “o

⁹ A sigla “MEC” refere-se ao Ministério da Educação do Brasil e a sigla “USAID” refere-se à Agência de Desenvolvimento Internacional dos Estados Unidos, *United States Agency for International Development* (BÜRIGO, 1989).

financiamento da publicação das traduções dos materiais do SMSG¹⁰ assim como prover fundos para os cursos em serviço necessários para ensinar os professores como usar esses materiais” (D'AMBROSIO, 1987, p. 142).

Duas publicações podem ser mencionadas no que se refere à crítica ao Movimento da Matemática Moderna no Brasil, a versão em língua portuguesa do livro “O Fracasso da Matemática Moderna” de Morris Kline, publicada em 1976 no Brasil e um artigo publicado no dia 21 de setembro de 1975 no jornal “O Estado de São Paulo” pelo professor Osvaldo Sangiorgi, um dos maiores defensores do Movimento da Matemática no Brasil, reconhecendo os erros que foram cometidos ao se adotar esse movimento. Nesse segundo texto, Sangiorgi aponta os erros:

- 1- Abandono paulatino do salutar hábito de calcular (não sabendo mais a "tabuada" em plena 5.^a e 6.^a séries!) porque as operações sobre conjuntos (principalmente com os vazios!) prevalecem acima de tudo; acrescenta-se ainda o exclusivo e prematuro uso das maquininhas de calcular, que se tornaram populares do mesmo modo que brinquedos eletrônicos.
- 2- Deixa-se de aprender frações ordinárias e sistema métrico decimal – de grande importância para toda a vida – para se aprender, na maioria das vezes incorretamente, a teoria dos conjuntos, que é extremamente abstrata para a idade que se encontra o aluno.
- 3- Não se sabe mais calcular áreas de figuras geométricas planas muito menos dos corpos sólidos que nos cercam, em troca da exibição de rico vocabulário de efeito exterior, como por exemplo “transformações geométricas”.
- 4- Não se resolvem mais problemas elementares – da vida cotidiana – por causa da invasão de novos símbolos e de abstrações completamente fora da realidade, como: “O conjunto das partes de um conjunto vazio é um conjunto vazio?”, proposto em livro de 5.^a série (SANGIORGI, 1975, p. 204).

No ano de 1976, o GEEM realizou, a pedido da Secretaria da Educação, o último curso de preparação de professores para o concurso de ingresso ao magistério (D'AMBROSIO, 1987). Ainda que esse fato possa ser considerado como um marco do término da disseminação das ideias do MMM no Brasil, ainda é possível identificar indícios desse movimento na cultura escolar, uma vez que o Movimento da Matemática Moderna no Brasil provocou diversas mudanças nas salas de aula (DUARTE; SILVA, 2006) e no currículo, como, por exemplo, no que se refere

à própria constituição da disciplina matemática pela fusão da trigonometria, da álgebra, da aritmética e da geometria. Outro diz respeito à presença ou à ausência de determinados conteúdos no currículo como, por exemplo, o cálculo diferencial e integral. Ou ainda, tem-

¹⁰ Sigla para expressão *School Mathematics Study Group* em língua inglesa.

se o relativo ao impacto da introdução do estudo de conjuntos no ensino fundamental (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004, p. 7).

Ao observar a forma de ensino da matemática nas escolas, percebe-se que há a necessidade de realizar reformas curriculares, com o objetivo de subverter os vestígios desse movimento.

Método da pesquisa

A pesquisa desenvolvida neste artigo é qualitativa, de cunho interpretativo e tem como fonte principal os artigos e livros publicados por Hans Freudenthal em língua inglesa, disponíveis a partir de diferentes inventários feitos.

Gil (2008) define pesquisa bibliográfica como aquela feita exclusivamente a partir de fontes bibliográficas, como artigos, livros, dissertações e teses. Para o autor, este tipo de pesquisa se diferencia da pesquisa documental, em que as fontes de informações são materiais que não foram tratados analiticamente.

Para Marconi e Lakatos (2003), a pesquisa bibliográfica pode se valer, também, de materiais audiovisuais, entrevistas e outras fontes que visam esgotar o assunto a ser estudado. Entretanto, as autoras, bem como Gil (2008), consentem que livros e artigos são fontes suficientes para a elaboração de uma pesquisa bibliográfica, cabendo aos pesquisadores se assegurar “das condições em que os dados foram obtidos, analisar em profundidade cada informação para descobrir possíveis incoerências ou contradições e utilizar fontes diversas, cotejando-se cuidadosamente” (GIL, 2008, p. 51).

Nesse sentido, a pesquisa bibliográfica recorre a materiais já tratados analiticamente para a produção de novas afirmações e discursos, mas como o tratamento dado é novo, entende-se que o estudo feito confere ao material uma nova perspectiva. Marconi e Lakatos (2003, p. 183) afirmam que “a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras”.

Para a pesquisa deste artigo, optou-se por trabalhar com a revisão de literatura sistemática (BARBOSA, 2018), um tipo de pesquisa bibliográfica, tendo em vista que o objetivo é investigar a perspectiva proposta por Hans Freudenthal como uma subversão ao Movimento da Matemática Moderna, com um corpus constituído sistematicamente.

Para o corpus da pesquisa, foram utilizados alguns textos buscados por membros do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA) da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Os membros deste grupo têm a intenção de inventariar as produções em Educação Matemática Realística feitas no Instituto Freudenthal e, nos materiais do GEPEMA estavam disponíveis 23 textos de autoria de Hans Freudenthal em língua inglesa, conforme apresentados no quadro a seguir.

Textos de Hans Freudenthal disponíveis no inventário do GEPEMA

Ano	Título
1961	<i>Models in applied probability</i>
1968	<i>Panel discussion</i>
1968	<i>Why to teach mathematics so as to be useful</i>
1968	<i>Further training of mathematics teachers in the netherlands</i>
1971	<i>Geometry between the devil and the deep sea</i>
1973	<i>Mathematics as an educational task</i>
1974	<i>Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school</i>
1974	<i>The crux of course design in probability</i>
1975	<i>Pupils' achievements internationally compared - the IEA</i>
1977	<i>Bastiaan's experiments on Archimeds' principle</i>
1977	<i>Creativity</i>
1977	<i>Teacher training - an experimental philosophy</i>
1978	<i>Weeding and sowing</i>
1979	<i>New math or new education?</i>
1979	<i>Rings and string</i>
1979	<i>Ways to report on empirical research in education</i>
1980	<i>Four-cube houses</i>
1981	<i>Major problems of mathematics education</i>
1981	<i>Should a mathematics teacher know something about the History of Mathematics?</i>
1983	<i>Didactical phenomenology of mathematical structures</i>
1991	<i>Revisiting mathematics education</i>
1993	<i>Thoughts on teaching mechanics: didactical phenomenology of the concept of force</i>

Fonte: os autores.

Para fazer um corte no corpus, buscou-se as expressões “*New Math*”, “*New Mathematics*”, “*Modern Mathematics Movement*”, “*Modern Mathematics Programme*” e “*Modern Textbooks*”. As expressões foram escolhidas após uma primeira leitura exploratória do material, em que se observou que o autor se referia ao Movimento da Matemática Moderna utilizando as quatro primeiras expressões; a quinta, “*Modern Textbooks*”, foi utilizada por Hans Freudenthal em alguns textos para se referir aos livros didáticos produzidos em consonância com a perspectiva do Movimento da Matemática Moderna.

As expressões supracitadas foram encontradas em 8 desses 23 textos, que foram destacados em negrito no quadro. A partir dessa busca, elaborou-se um inventário contendo os excertos encontrados a fim de produzir a análise deste artigo. Para cada um dos trechos inventariados, buscou-se extrair suas ideias centrais. Em seguida, foram reunidos aqueles trechos que continham ideias semelhantes. Além dos textos do autor, foram utilizados textos de outros autores da Educação Matemática Realística para auxiliar na descrição e discussão de aspectos desta abordagem.

A Educação Matemática Realística de Hans Freudenthal como uma proposta de subversão aos resquícios do Movimento da Matemática Moderna no Brasil

As ideias presentes na abordagem de ensino preconizada por Hans Freudenthal, a Educação Matemática Realística, são uma forma de subversão ao Movimento da Matemática Moderna. É possível identificar, em diversos textos, críticas realizadas por Hans Freudenthal a esse movimento. Para o autor, um dos equívocos do MMM foi ignorar toda a didática da aritmética que já existia anteriormente ao movimento, realizando diversas mudanças curriculares (FREUDENTHAL, 1973), partindo do pressuposto que não havia avanços em relação às discussões sobre o ensino da aritmética.

Freudenthal (1973, p. 293) considera que

no Movimento da Matemática Moderna, a ruptura com a tradição é completa. Toda a teoria do conjunto intelectual é um jogo sem sentido com 26 letras. Esta é a amarga consequência de quinze anos de um movimento de inovação que durante muitos anos apenas visou a renovação do assunto. Pessoas que alertaram contra essa abordagem tacanha foram ridicularizadas.

Ao tratar do uso excessivo de letras no ensino de matemática, o autor considera ser um erro, visto que elas, muitas vezes, não têm significado algum ou significam apenas “elas mesmas”. Por exemplo, a inserção de conjuntos do tipo “{a, b, c}” representando o conjunto das letras a, b, c, não faz sentido e isso ocorre porque “as pessoas não sabem o que são conjuntos e a que objetivo servem na matemática genuína, portanto, precisam, de alguma forma, inventar conjuntos e aplicações de conjuntos” (FREUDENTHAL, 1973, p. 288-289).

Para a Educação Matemática Realística, a matemática deve ser tomada como uma atividade. Isso significa que ela deve ser vista não como um produto final, mas como fruto das ações dos seres humanos. Além disso, a matemática não deve ser vista como uma atividade restrita aos matemáticos, embora a ação à qual ela está associada envolve atividades que comumente são atribuídas aos matemáticos, tais como a resolução de problemas, a procura de problemas, a matematização de assuntos da realidade, a matematização da própria matemática (GRAVEMEIJER, 2008).

Oposta à visão de matemática como um conteúdo sofisticado, vindo de cima para baixo, está a matemática como uma atividade natural e social que se desenvolve de acordo com o crescimento e o crescimento precisa de um indivíduo em um mundo em expansão. Matemática é uma atitude, uma forma de dominar este mundo cognitivamente, praticamente, emocionalmente (FREUDENTHAL, 1979, p. 322, tradução nossa).

Freudenthal (1983) entende que as mudanças realizadas pelo MMM estavam relacionadas apenas aos conteúdos, sem se preocupar com a forma como seriam ensinados, tornando assuntos, como a teoria dos conjuntos, algo sem sentido para os estudantes. Assim, é relevante pensar uma proposta de ensino que não reformule apenas os conteúdos, mas que discuta como a matemática, enquanto atividade, pode ser trabalhada em sala de aula.

Além disso, na atividade matemática, Freudenthal (1981) entende que os insights são fundamentais para a aprendizagem. Segundo o autor, o insight, bem como a compreensão e o raciocínio, é mais importante que a memorização, os algoritmos, os procedimentos rotineiros. Para ele, um dos erros do Movimento da Matemática Moderna foi “substituir os insights dos estudantes pelos insights de matemáticos adultos” (FREUDENTHAL, 1981, p. 141, tradução nossa). Além dos “matemáticos adultos”, o autor entende que os insights dos estudantes perderam lugar aos dos autores de livros didáticos e dos professores. Ou seja, o papel central da aprendizagem matemática deixou, no MMM, de ser dos alunos.

Nesse sentido, a Educação Matemática Realística adota um método de ensino que trabalha com os insights e produções dos próprios estudantes. Este método é denominado reinvenção guiada, em que há uma preocupação em como a matemática será construída pelo estudante, proporcionando um sentido para aquilo que se deseja que ele aprenda. Para Freudenthal (1973), as aulas de matemática não devem ser aquelas em que os alunos são silenciosos, passivos, receptores de algum conhecimento pronto e acabado. O autor entende que a aprendizagem se dá pelo “fazer matemática”. Nessa direção, aulas de matemática nessa perspectiva são ambientes em que os alunos assumem um papel ativo, de reinventores do conhecimento matemático.

Na reinvenção guiada, são oferecidas aos estudantes oportunidades de reinventar matemática, guiados pelo professor. Neste método de ensino, o professor tem o papel de orientador, de guia, uma vez que não é possível que o estudante percorra todas as etapas que os matemáticos percorreram por séculos dispondo dos recursos materiais que historicamente dispunham. Então, o professor auxilia os estudantes em suas trajetórias que tomam como ponto de partida fenômenos realísticos em direção a uma matemática mais formal (SILVA,

2015). Assim, é possível que eles percorram um caminho que permite a compreensão do conhecimento matemático, dando sentido às ideias matemáticas. Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 11) afirma que

utilizar currículos cientificamente estruturados, nos quais os alunos são confrontados com uma matemática pronta, é uma “inversão antididática”¹¹. Eles baseiam-se na premissa falsa de que os resultados de um raciocínio matemático, colocado numa lista de conteúdos, podem ser transferidos diretamente para os alunos. Além do fato de que essa abordagem - na qual os alunos são simplesmente obrigados a “engolir” material até pré-digerido - é desumana, ela simplesmente não funciona.

Na Educação Matemática Realística, a matemática é ensinada partindo de fenômenos realísticos, e não a partir de uma matemática já pronta. Os alunos precisam se tornar capazes de aplicar a matemática e, para isso, o professor precisa utilizar como ponto de partida para a aprendizagem contextos realísticos e que sejam significativos para os estudantes (FERREIRA, 2013). Para a RME, realístico é tudo aquilo que pode ser imaginado ou experienciado por alguém. São realísticos fenômenos como os naturais, os sociais, os das ciências, os da própria matemática. Isso implica que o professor pode recorrer a contextos imagináveis ou experienciáveis pelos estudantes como ponto de partida para suas aulas.

Um exemplo de como o Movimento da Matemática Moderna compreende a matemática e suas estruturas despregadas da realidade é o fato de que “quase todos os autores de livros didáticos modernos parecem acreditar que uma teoria formal dos números naturais pode ser baseada na cardinalidade, o que é matematicamente e didaticamente errado (FREUDENTHAL, 1973, p. 122)”. Do ponto de vista didático, Freudenthal (1973) entende que a contagem é um processo que os indivíduos aprendem antes de aprender a quantificar conjuntos e não faria sentido imaginar que as crianças “constituiriam um único número como uma classe de conjuntos mutuamente equivalentes, nem mesmo inconscientemente” (FREUDENTHAL, 1973, p. 192). O autor também destaca que, historicamente, a contagem antecede o estudo da cardinalidade de conjuntos, como apresentada por Cantor. Para o autor, as operações elementares precisam ser compreendidas do ponto de vista da realidade, para que seja possível entender seus isomorfismos (FREUDENTHAL, 1991).

Dois aspectos precisam ser levados em consideração ao discutir as afirmações de Freudenthal a respeito do ensino dos números com base na contagem em detrimento do ensino dos números com base na cardinalidade de conjuntos: a concepção do autor de “níveis” e a importância da História da Matemática para o ensino de matemática.

Na Educação Matemática Realística, as produções dos estudantes são usadas como ponto de partida para que as estratégias utilizadas se tornem mais formais. Cabe ao professor, então,

¹¹Uma inversão antididática é uma proposta de tomar os resultados das atividades matemáticas, que foram desenvolvidas ao longo do tempo, como ponto de partida para o ensino da matemática (FREUDENTHAL, 1973, 1991). É uma inversão porque parte do produto para conhecer o processo, e, é antididática porque não favorece o ensino. Na expressão, o termo “antididática” tem o papel de adjetivo da inversão, caracterizando-a como contrária à didática (SILVA, 2015).

investigar se as interpretações e resoluções informais dos estudantes podem “antecipar” práticas matemáticas mais formais. Se assim for, o raciocínio inicialmente informal dos estudantes pode ser usado como um ponto de partida para o processo de reinvenção (GRAVEMEIJER, 2008, p. 289, tradução nossa).

A ideia proposta pela RME não é a da existência de conhecimentos prévios ou de pré-requisitos, mas a de que as atividades matemáticas dos estudantes podem ser utilizadas como pontos de partida para uma formalização (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003). Isso é conhecido pela Educação Matemática Realística como Princípio de Níveis.

Por isso, na Educação Matemática Realística, não faz sentido iniciar o processo de ensino com o conhecimento matemático formalizado, visto que ele representa o final de um processo de matematização. Nesse sentido, a RME propõe que o trabalho em sala de aula se inicie a partir das resoluções informais dos estudantes. No Movimento da Matemática Moderna, entretanto, a preferência foi pelas definições globais em detrimento das locais.

Portanto, se alguém começasse hoje do zero, cada matemático escolheria a definição global e, no máximo, mencionaria a segunda definição como uma mais barata, mas parece que mesmo em matemática uma tradição milenar não é fácil de quebrar (FREUDENTHAL, 1978, p. 256, tradução nossa).

Em relação à importância da História da Matemática para o ensino de matemática, entende-se na RME que

o conceito de reinvenção faz que os desenvolvedores [de currículos] considerem a construção do conhecimento matemático de um ponto de vista histórico. E quando o ponto de vista histórico é levado a sério, o ensino de matemática não é focado em aprender algoritmos e procedimentos, mas terá como objetivo compreender conceitos principais, no sentido de que o princípio da reinvenção abre o caminho para o desenvolvimento da Educação Matemática, uma vez que ajuda a descrever a atividade dos estudantes (KEIJZER; GALEN; OOSTERWALL, 2004, p. 6, tradução nossa).

O MMM foi desenvolvido sem preocupações com a realidade e com a aprendizagem dos assuntos matemáticos os quais se propôs a defender. Seu foco foi apenas uma mudança na lista de conteúdos, sem se importar com uma discussão a respeito da forma como isso seria trabalhado nas salas de aula e muitas vezes o que se apresentava nas aulas de matemática era algo que não fazia sentido para os alunos e nem para os professores.

As conferências em Royaumont (1959) e Dubrovnik (1960) definiram o ritmo: tentando recuperar o atraso de um século, propondo montanhas de novos assuntos e traduzindo-os em novos livros, chamados de Movimento da Matemática Moderna - uma competição acirrada entre os dois especialistas e charlatães com, em geral, resultados angustiantes. Aqueles que não conseguiram acompanhar foram as pessoas pobres na sala de aula que deveriam ensinar e aprender o Movimento da Matemática Moderna, que na maioria das vezes era um Novo *Nonsense* - não ensinável, não aprendido, não matemático (FREUDENTHAL, 1979, p. 321).

Em relação à matemática moderna não fazer sentido aos professores, Freudenthal (1968) considera que a mudança repentina impactou o trabalho docente, tendo em vista que muitos estavam habituados à “matemática tradicional” e tiveram pouco ou nenhum contato com os tópicos sugeridos pelo Movimento da Matemática Moderna. É certo que os países investiram esforços e recursos para “treinar” os professores para trabalharem com matemática moderna. No Brasil, por exemplo, Sangiorgi organizou um curso de aperfeiçoamento para professores em 1961 e, posteriormente, em 1964 foi oferecido um curso para professores do ensino primário, como já apresentado na seção a respeito do MMM. Ainda assim, Freudenthal (1968, p. 486) considera que, outras revisões curriculares feitas antes do Movimento da Matemática Moderna “foram mudanças relativamente graduais, sem interrupções como a transição para o que agora é chamado de matemática moderna”. Além disso, o autor acrescenta que

quando nos dirigimos aos professores, tínhamos dito a eles que em um futuro próximo a matemática moderna seria introduzida nos currículos, e que nós os ensinávamos matemática moderna, mas ao mesmo tempo os avisamos que nesses cursos eles não iriam aprender nada que pudessem colocar diretamente em uso docente, agora ou mesmo mais tarde, quando os novos currículos estivessem funcionando. Não deve ser o assunto, mas o espírito da matemática moderna que pretendemos transmitir a eles (FREUDENTHAL, 1968, p. 489, tradução nossa).

Ou seja, o autor entende que o que foi ensinado nos cursos pouco seria útil para o trabalho docente, tendo em vista que foi trabalhada apenas uma lista de conteúdos matemáticos e não foi promovido um ambiente em que os professores pudessem se aproximar da matemática moderna. Tal afirmação reforça a importância dada por Hans Freudenthal à matemática como uma atividade humana, em que a ênfase deve estar no fazer e não no produto dessa ação (o conhecimento matemático historicamente acumulado e validado).

Os defensores do MMM estavam preocupados em propor uma matemática moderna, que além de não ter preocupação com as práticas pedagógicas envolvidas na adaptação desse movimento às salas de aula, também ignorou tudo que existia anteriormente, ocasionando grandes prejuízos ao desenvolvimento do

currículo de matemática, de acordo com Freudenthal (1973, p. 288): “a didática da matemática foi adiada um século”.

Assim, se deu início às discussões da abordagem da Educação Matemática Realística, a partir das preocupações de Hans Freudenthal com as questões pedagógicas, abandonando as ideias do Movimento da Matemática Moderna, “ao desenvolver nosso currículo de matemática para a escola primária, não nos curvamos ao que é, ou foi, a moda. Rejeitamos os hobbies do Movimento da Matemática Moderna - conjuntos, grupos, álgebra linear, lógica proposicional” (FREUDENTHAL, 1977, p. 372, tradução nossa).

Os debates propostos por Hans Freudenthal tiveram tamanha relevância no cenário neerlandês que culminaram na adoção de uma abordagem, denominada realística, na reforma do currículo do país.

Algumas considerações

O objetivo deste artigo é analisar e discutir excertos de textos de Hans Freudenthal (disponíveis em língua inglesa) acerca do Movimento da Matemática Moderna. Para tanto, apresentou-se uma revisão de literatura sobre o MMM e uma discussão, pautada nas ideias de Hans Freudenthal e outros autores da Educação Matemática Realística a partir das críticas de Freudenthal a esse movimento.

Foi possível observar que as críticas de Freudenthal ao Movimento da Matemática Moderna se dão diretamente ao processo como o movimento foi implementado, mas também se suplanta nas premissas assumidas pelos adeptos do movimento. Tais premissas (que Freudenthal considera equivocadas) são tanto do ponto de vista matemático, quanto do ponto de vista didático.

Cabe ressaltar que Hans Freudenthal é um matemático de formação e começou a se preocupar com questões relativas à Educação Matemática a partir da implementação do Movimento da Matemática Moderna nos Países Baixos e no mundo, e a partir disso, realizou diversas discussões com o objetivo de defender uma abordagem denominada realística.

A Educação Matemática Realística é uma forma de subversão ao Movimento da Matemática Moderna, tendo como foco a preocupação com o estudante, que tem a oportunidade de desempenhar um papel ativo em sua aprendizagem, construindo sua própria matemática. O MMM não tinha preocupações com a didática, o foco estava no conteúdo, e isso resultou em um atraso de pelo menos um século no desenvolvimento da didática da matemática.

Os efeitos do Movimento da Matemática Moderna puderam ser sentidos em diversos países do mundo, com diferentes impactos nas propostas curriculares, nas ações dos professores, nos livros didáticos. Sabe-se que as consequências desse movimento, bem como seus resquícios, carregam as particularidades de cada país, tendo em vista as questões sociais, econômicas, políticas, geográficas e, da mesma maneira, as reformas que antecederam o MMM. Uma indicação de estudo futuro, então, é investigar as aproximações (e distanciamentos) dos efeitos curriculares do Movimento da Matemática Moderna no Brasil e nos Países Baixos, visando compreender em que medida a implementação de aspectos e princípios da Educação

Matemática Realística no currículo de matemática neerlandês pode auxiliar na compreensão dos efeitos da RME no currículo de matemática brasileiro.

Por fim, Freudenthal (1979), em um texto no qual ele avalia alguns efeitos do Movimento da Matemática Moderna no ensino de matemática e de outras tentativas de reforma (como o movimento “*Back to Basis*”), questiona: “nós estamos vinte anos mais velhos [desde o início do MMM]. Estamos também 20 anos mais sábios [...]?”. No Brasil, o início do Movimento da Matemática Moderna alcança a marca de meio século. Estamos meio século mais sábios?

Referências

- BARBOSA, J. C. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e distanciamentos. In A. M. P. de Oliveira & M. I. R. Ortigão. **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. Brasília: SBEM, 2018. p. 17-57.
- BÜRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. Porto Alegre: Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.
- D'AMBROSIO, B. S. **The Dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education**. Indiana: Tese (Doutorado em Filosofia), Indiana University, 1987.
- DUARTE, A. P. S.; SILVA, M. C. L. da. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa**, v. 1, n. 1, p. 87-93, 2006.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5 edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- FEHR, H. F.; CAMP, J. C.; KELLOG, H. **La revolucion en las matematicas escolares (segunda fase)**. Washington, D.C: Organizacion de los Estados Americanos, Secretaria Geral, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, 1971.
- FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística**. Londrina: Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2013.
- FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1983.
- FREUDENTHAL, H. Further training of mathematics teachers in the Netherlands. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, p. 484-492, 1968.
- FREUDENTHAL, H. Major problems of mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 133-150, 1981.
- FREUDENTHAL, H. New math or new education? **Prospects**, v. 9, n. 3, p. 321-331, 1979.
- FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

- FREUDENTHAL, H. Teacher training: An experimental philosophy. **Educational Studies in Mathematics**, v. 8, n. 4, p. 369-376, 1977.
- FREUDENTHAL, H. v. Dordrecht: Reidel, 1973.
- FREUDENTHAL, H. **Weeding and sowing**: preface to a science of mathematical education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1978.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 edição. São Paulo: Atlas, 2008.
- GOODSTEIN, R. L. Reviews: New Thinking in School Mathematics, Synopses for Modern Secondary School Mathematics. **The Mathematical Gazette**, v. 46, n. 355, 69-72, 1962.
- GRAVEMEIJER, K. RME theory and mathematics teacher education. In: **International handbook of mathematics teacher education**. Rotterdam: Sense Publisher, 2008. p. 238-302.
- KEIJZER, R.; VAN GALEN, F.; OOSTERWALL, L. **Reinvention revisited**: learning and teaching decimals as an example. Freudenthal Institute, Utrecht University, 2004.
- KLINE, M. **O fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.
- MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 edição. São Paulo: Atlas, 2003.
- NAKASHIMA, M. **O papel da imprensa no Movimento da Matemática Moderna**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.
- SANGIORGI, O. Quinze anos de Matemática. **O Estado de São Paulo**. São Paulo, 21/09/1975, p. 204.
- SILVA, G. dos S. e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. Londrina: Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2018.
- SILVA, G. dos S. e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. Londrina: Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2015.
- SOARES, F. dos S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. da. Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Horizontes**, v. 22, n. 1, p. 7-15, 2004.
- SOARES, F. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: avanço ou retrocesso? Rio de Janeiro: Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: Freudenthal Institute, 1996.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n. 1, p. 09-35, 2003.

Submetido: 24/04/2022

Aceito: 10/02/2023